ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PROBLEME n° 1

1) La fonction f(t)cost (resp. f(t)sint) est continue sur R comme produit de deux fonctions continues.
La fonction u est la primitive de cette fonction s'annulant en 0.
u est donc dérivable sur R et pour tout x réel, u'(x) = f(x)cosx.
De même v'(x) = f(x)sinx.

2) En développant sin(x – t) = sinx.cost – cosx.sint, et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on a :

$T_f(x) = u(x)\sin x - v(x)\cos x$

T_f est donc dérivable (différence de produits de fonctions dérivables sur R).
Et on a, pour tout x réel :
$T_f'(x) = u(x)\cos x + u'(x)\sin x - v'(x)\cos x + v(x)\sin x$

En remplaçant u' et v' par leurs expressions (question 1), on obtient :

$T_f'(x) = u(x)\cos x + v(x)\sin x$

On montre aisément que T_f' est dérivable également, et que T_f'' est continue :
$T_f''(x) = v(x)\cos x - u(x)\sin x + f(x)$

T_f appartient donc à F.
T est une application de E dans F.

La linéarité $T_{f+g} = T_f + T_g$ résulte de la linéarité de l'intégrale.

3) Puisque, d'après les questions 1 et 2, $T_f(x) = u(x)\sin x - v(x)\cos x$ et $T_f''(x) = v(x)\cos x - u(x)\sin x + f(x)$, on a bien $T_f + T_f'' = f$

Soit $f \in N(T)$: $T_f = 0$ et donc $T_f'' = 0$ d'où $f = T_f + T_f'' = 0$
Donc le noyau de T se réduit à l'application nulle de R dans R.

4) Soit $g \in Im(T)$: cela signifie qu'il existe (au moins) une fonction f de E telle que $g = T_f$. Donc $g \in F$ et comme $g(x) = \int_{[0,x]} f(t)\sin(x - t)\, dt$, on a de façon évidente $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$
$\Rightarrow g \in G$

D'où : $Im(T) \subset G$

Calcul de $T_{g+g''}$.

$T_{g+g''}(x) = \int_{[0,x]} g(t)\sin(x - t)\, dt + \int_{[0,x]} g''(t)\sin(x - t)\, dt$

Intégrons par parties :

Posons, dans la première intégrale, $u'(t) = \sin(x - t)$ et $v(t) = g(t) \Rightarrow u(t) = \cos(x - t)$ et $v'(t) = g'(t)$.
Dans la deuxième intégrale, on pose $u'(t) = g''(t)$ et $v(t) = \sin(x - t) \Rightarrow u(t) = g'(t)$ et $v'(t) = -\cos(x - t)$.

Remarque : aucune confusion entre ces notations u et v classiques en intégration par parties et les fonctions u et v de la question 1.

On obtient :

$T_{g+g''}(x) = [g(t)\cos(x - t)]_{[0,x]} - \int_{[0,x]} g'(t)\cos(x - t)\, dt + [g'(t)\sin(x - t)\,)]_{[0,x]}$
$+ \int_{[0,x]} g'(t)\cos(x - t)\, dt$
$= g(x) - g(0)\cos x - g'(0)\sin x = g(x)$ car $g(0) = g'(0) = 0$.

On déduit que si g appartient à G, alors $T_{g+g''} = g$, donc $g \in Im(T)$: $G \subset Im(T)$.

On en conclut $Im(T) = G$.

5) D'après les résultats précédents, T est une application linéaire de E dans G, injective ($N(T) = 0$) et telle que $Im(T) = G$ (surjective). T est donc une bijection, c'est-à-dire un isomorphisme de E dans G, elle admet donc une application réciproque ,notée T^{-1}.

On a, pour tout g de G, $T_{g+g''} = g$; en composant par l'inverse, on a $T_g^{-1} = g + g''$.

6) Effectuons le calcul intégral :

$T_f(x) = \int_0^x \text{sint}\,\sin(x - t)\,dt = \int_0^x [\cos(2t - x) - \cos x]/2\,dt = (\sin x - x\cos x)/2$

Posons $h(x) = (\sin x - x\cos x)/2$, $h \in F$, et donc $s = T_h^{-1}$ et $h + h'' = s$

PROBLEME n° 2

1) f est continue sur l'intervalle $U = [0, +\infty[$; elle admet donc une primitive F sur U, et on peut ainsi écrire $h(x) = [F(x) - F(0)]/x$.
F est dérivable et donc continue sur $]0, +\infty[$; comme rapport de deux fonctions continues sur $]0, +\infty[$, h est donc continue sur $]0, +\infty[$.

Quand $x \to 0$, puisque F est dérivable en 0, $[F(x) - F(0)]/x$ tend vers $F'(0) = f(0) = h(0)$; d'où $\lim_{x\to 0} h(x) = h(0)$.

2) On a établi dans la question 1 que h était continue sur $U = [0, +\infty[$, c'est-à-dire que $h \in E$. H est donc une application de E dans E.

La linéarité de H est évidente : a et b étant deux réels, f et u deux fonctions de E :

- Pour $x > 0$, $H(af + bu) = aH(f) + bH(u)$, d'après la linéarité de l'intégrale

- Ne pas oublier le cas $x = 0$: $H(af + bu)(0) = (af + bu)(0) = af(0) + bu(0) = aH(f)(0) + bH(u)(0)$

3) F est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc h est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme rapport de deux fonctions dérivables.

4) Supposons que 0 soit valeur propre de H : il existe donc une fonction f non nulle de E telle que $H(f) = 0$.
On a donc $f(0) = 0$ et, pour tout $x > 0$, $F(x) - F(0) = 0$, c'est-à-dire $F(x) = F(0) =$ constante.
F étant constante, $F'(x) = f(x) = 0\ \forall x \in]0, +\infty[$.
Or f est non nulle et donc 0 ne peut être valeur propre de H.

5) $H(f) = \alpha f = h \Rightarrow f = h / \alpha$
D'après la question 3, h est dérivable sur $]0, +\infty[$, donc f l'est aussi.

Plaçons-nous sur $]0, +\infty[$; pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = f(x) = h(x)/\alpha = [F(x) - F(0)]/\alpha x$, ou encore :

$\alpha x\varphi(x) = F(x) - F(0)$

En dérivant :

$\alpha[x\varphi'(x) + \varphi(x)] = f(x) = \varphi(x)$

D'où la relation demandée : $\forall x > 0 \quad \alpha x \varphi'(x) = (1 - \alpha)\varphi(x)$

6) Soit $x > 0$.
On a :
$g'(x) = (1 - 1/\alpha)x^{-1/\alpha}\varphi(x) + x^{(\alpha-1)/\alpha}\varphi'(x)$.

$g'(x) = x^{-1/\alpha}[\alpha x \varphi'(x) + (\alpha - 1)\varphi(x)]/\alpha = 0$ d'après la relation trouvée à la question 5.

La fonction g est donc constante sur $]0, +\infty[$.

7) On déduit de ce qui précède que si φ est la restriction à $]0, +\infty[$ d'une fonction f non nulle et continue telle que $H(f) = \alpha f$, avec $\alpha \neq 0$, il existe une constante réelle k telle que $g(x) = k$, ou encore :

$\varphi(x) = k\, x^{(1-\alpha)/\alpha}$

Comme f est continue en 0, f admet une limite finie à droite en 0 égale à f(0) ; une condition nécessaire pour que ceci soit réalisé est que $(1 - \alpha)/\alpha \geq 0$, c'est-à-dire :

$0 < \alpha \leq 1$

Alors : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$ si $0 < \alpha < 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = k$ si $\alpha = 1$.

8) Il résulte de tout ce qui précède que l'ensemble des valeurs propres α de H est l'intervalle $]0, 1]$.

Si $\alpha \in]0, 1[$, $f(x) = k\, x^{(1-\alpha)/\alpha}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$

Si $\alpha = 1$, $f(x) = k$

Remarque : en revenant à la définition initiale, on vérifie facilement par le calcul que les fonctions f précédentes sont bien les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\alpha \in]0, 1[$ et $\alpha = 1$