ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Les deux problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

PROBLEME n° 1

E désigne l'ensemble des fonctions numériques continues définies sur R ; F désigne l'ensemble des fonctions numériques continues définies sur R, deux fois dérivables, de dérivée seconde continue sur R (R désigne l'ensemble des nombres réels).

1) Soit $f \in E$. On définit les fonctions u et v de la variable réelle x par :

$$u(x) = \int_0^x f(t) \cos t \, dt$$

$$v(x) = \int_0^x f(t) \sin t \, dt$$

Montrer que u et v sont dérivables et calculer leurs dérivées u' et v'.

2) On considère l'application T qui, à la fonction f de E, associe la fonction T_f définie sur R par :

$$T_f(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$$

Exprimer T_f en fonction de u et v.
Montrer que T_f est deux fois dérivable sur R, et que sa dérivée seconde T_f'' est continue sur R.
Etablir que T est une application linéaire de E dans F ; on notera par la suite N(T) et Im(T) respectivement le noyau et l'image de T.

3) Démontrer la relation suivante :

$$T_f + T_f'' = f$$

En déduire le noyau N(T) de l'application T, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions f de E telles que $T_f = 0$.

4) On considère le sous-ensemble G de F défini par $G = \{g : g \in F, g(0) = g'(0) = 0\}$

Montrer que $Im(T) \subset G$.

Soit $g \in G$. Calculer $T_{g+g''}$. En déduire alors Im(T).

5) Montrer que T est inversible ; on notera par T^{-1} l'inverse de T.

Montrer que, pour toute fonction g de G, $T^{-1}(g) = g + g''$.

6) On définit la fonction s par : s(x) = sin x.
Calculer T_s.

Déterminer une fonction h de F telle que h + h'' = s.

PROBLEME n° 2

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions numériques continues définies sur U = $[0, +\infty[$. Soit H l'application qui, à toute fonction f de E, associe la fonction H(f) = h définie par :

$$H(f)(x) = h(x) = \left[\int_0^x f(t)\,dt\right] / x \qquad \text{si } x \neq 0$$

$$H(f)(0) = h(0) = f(0) \qquad \text{si } x = 0$$

1) Montrer que h est continue sur $]0, +\infty[$ et que $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = h(0)$.

2) Etablir que H est un endomorphisme de E, c'est-à-dire une application linéaire de E dans E.

3) Démontrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$.

4) S'il existe un réel α et une fonction <u>non nulle</u> f de E vérifiant $H(f) = \alpha f$, α sera dite valeur propre de l'application H et f sera un vecteur propre associé à la valeur propre α. Montrer que 0 ne peut pas être valeur propre de H.

5) Soit $\alpha \neq 0$ une valeur propre de l'application H et f un vecteur propre associé à α. Démontrer que f est nécessairement dérivable sur $]0, +\infty[$.
On note par φ la restriction à $]0, +\infty[$ de la fonction f, φ' étant la dérivée de φ sur $]0, +\infty[$.
Montrer que l'on a la relation suivante :

$$\forall\, x > 0 \quad \alpha\, x\, \varphi'(x) = (1 - \alpha)\, \varphi(x)$$

6) On pose, pour $x > 0$, $g(x) = x^{(\alpha-1)/\alpha}\, \varphi(x)$.
Calculer g' ; en déduire que g est nécessairement constante sur $]0, +\infty[$.

7) Déterminer une condition nécessaire sur α telle que la fonction φ est la restriction à $]0, +\infty[$ d'une fonction f continue sur $[0, +\infty[$.

8) Donner les valeurs propres de H et les vecteurs propres associés.