AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Soient les deux relations vérifiées par x, y et z, réels strictement positifs :

$xyz > 1$

$x + y + z < (1/x) + (1/y) + (1/z)$

1) Supposons que $x = 1$
   Alors $yz > 1$ et $1+ y + z < 1 + (1/y) + (1/z)$

   D'où : $y + z < (1/y) + (1/z) \Leftrightarrow y + z < (y + z) / yz \Leftrightarrow yz < 1$, ce qui est impossible.

2) Supposons x, y et z tous ≤ 1 ; alors le produit $xyz \leq 1$, ce qui est impossible. L'un au moins des réels x, y ou z est donc > 1.

3) Supposons x, y et z tous ≥ 1. Il est évident que $x \geq 1/x$, $y \geq 1/y$, $z \geq 1/z$, et donc que la somme $x + y + z \geq (1/x) + (1/y) + (1/z)$. ceci est impossible. L'un au moins des réels x, y ou z est donc < 1.

Exercice n° 2

1) Faisons une intégration par parties :

$I = [- Lnx/2(x^2 - 1)] + \int [1/2x(x^2 - 1)]dx$ $I = [- Lnx/2(x^2 - 1)] + 1/2\int [1/x(x^2 - 1)]dx$

Notons par J la deuxième intégrale :

$J = \int [1/x(x^2 - 1)]dx$

$1/x(x^2 - 1) = a/x + b/(x - 1) + c/(x + 1)$

On en déduit : $a = -1$, $b = 1/2$, $c = 1/2$

$2J = -2\int dx/x + \int dx/(x+1) + \int dx/(x-1)$

$J = -\text{Ln } x + \text{Ln}(x^2-1)^{1/2} = \text{Ln}[(x^2-1)^{1/2}/x]$

D'où :

$I = [-\text{Ln}x/2(x^2-1)] + \text{Ln}[(x^2-1)^{1/2}/x]$

2) $I(u) = -(\text{Ln } u)/2(u^2-1) + (\text{Ln } 2)/6 + \{\text{Ln }[(u^2-1)^{1/2}/u] - \text{Ln }(3^{1/2}/2)\}$

3) Quand $u \to +\infty$, $I(u) \to (\text{Ln } 2)/6 - \text{Ln }(3^{1/2}/2) \approx 0{,}26$.

Problème

Partie I :

1) $f(x) = \text{Ln }(1 + e^x)$.

Dérivées :
$f'(x) = e^x/(1+e^x) > 0\ \forall x$
$f''(x) = e^x/(1+e^x)^2 > 0\ \forall x$
Puisque f' est positive, f est croissante.
Asymptotes :
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
$f(x)/x \to 1$
$y - x = \text{Ln}(1 + e^{-x}) \to 0$

La droite $y = x$ est asymptote quand $x \to +\infty$; on en déduit également que la courbe est au-dessus de son asymptote.
Tangente en x=0 :
$f'(0) = 1/2$
Intersection avec l'axe vertical :
$x = 0 \Rightarrow y = \text{Ln}2 = 0{,}693$

2) Soit l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

2a) $d(x) = (x^2 + 4x + 8\,\text{Ln}2)/8 - \text{Ln}(1 + e^x)$.
$d'(x) = x/4 + 1/2 - e^x/(1 + e^x)$; $d'(0) = 0$; $d'(1) = 3/4 - e/(e+1)$
$d''(x) = 1/4 - e^x/(1 + e^x)^2$; $d''(0) = 0$; $d''(1) = 1/4 - e/(e+1)^2$
$d'''(x) = e^x(1 + e^x)(e^x - 1)/(1 + e^x)^4 > 0$
d est donc croissante de $d(0) = 0$ à $d(1) = 1/8 + 1/2 + \text{Ln}2 - \text{Ln}(1+e) = 0{,}005$
Donc $0 \leq d(x) \leq M$, où $M = 0{,}005$.

On en déduit : $0 \leq g(x) - f(x) \leq M$, c'est-à-dire $g(x) - M \leq f(x) \leq g(x)$.

D'où : $A - M \leq I \leq A$

où A est l'intégrale $\int_{[0,1]} (x^2 + 4x + 8\,\text{Ln}2)/8\,dx = 0{,}985$.

$0{,}98 \leq I \leq 0{,}985$

3) $k \neq 0$.
$D(k) = \{x \,/\, e^x + k > 0\}$
1er cas : $k > 0$
$D(k) = \mathbb{R}$

2ème cas : $k < 0$
$e^x > -k \Leftrightarrow x > \text{Ln}(-k)$

4) A tout réel k, on associe la fonction f_k définie, pour $x \in D(k)$, par $f_k(x) = \text{Ln}(e^x + k)$.
$f'(x) = e^x/(e^x + k)$

1er cas : $k > 0$
$f'(x) > 0$
Sur R, f croît de Ln k à $+\infty$.

Remarque : si $k < 1$, la courbe associée à f_k coupe l'axe des abscisses en un point x tel que $e^x = 1 - k$, soit $x = \text{Ln}(1 - k)$.
Par contre, si $k \geq 1$, la courbe associée à f_k est au-dessus de l'axe des abscisses.

Asymptote :
$\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \text{Ln}\,k$
$\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = +\infty$
$f(x)/x \to 1$
$y - x = \text{Ln}(1 + ke^{-x}) \to 0$ quand $x \to +\infty$
La droite $y = x$ est asymptote.

Position de la courbe par rapport à l'asymptote :
$y - x = \text{Ln}(1 + ke^{-x}) \approx ke^{-x} > 0$ si $k > 0$, < 0 si $k < 0$.

Tangente :
La pente en $x = 0$ est $y'(0) = 1/(1 + k)$

$2^{ème}$ cas : $k < 0$
$x > \text{Ln}(-k)$
La fonction f_k croît de $-\infty$ à $+\infty$, coupant l'axe des abscisses en $\text{Ln}(1 - k)$, avec une pente en ce point égale à $(1 - k)$.

5) Soit à montrer que, pour $k > 0$, $f_k(x + \text{Ln}k) = f(x) + \text{Ln}\, k$

$f_k(x + \text{Ln}k) = \text{Ln}(e^{x+\text{Ln}k} + k) = \text{Ln}(ke^x + k) = \text{Ln}k + \text{Ln}(e^x + 1) = f(x) + \text{Ln}\, k$

Pour construire la courbe $C(k)$ représentative de f_k, on remarque que $f_k(u) = f(u - \text{Ln}\, k) + \text{Ln}k$. Donc pour passer d'un point de C au point correspondant de $C(k)$, on fait d'abord une translation de $-\text{Ln}\, k$ parallèlement à l'axe des abscisses, puis une translation de $\text{Ln}\, k$ parallèlement à l'axe des ordonnées.

6) Soit Δ la première bissectrice, d'équation $y = x$.

Soit M de coordonnées (a, b) ; M', symétrique de M par rapport à Δ a pour coordonnées (b, a).

On suppose que $M \in C(k)$ associée à f_k, c'est-à-dire que $f_k(x) = \text{Ln}(e^x + k)$.
Soient X et Y les coordonnées de M' : $X = y$, $Y = x$.
$X = \text{Ln}(e^Y + k) \Leftrightarrow e^X = e^Y + k \Leftrightarrow e^Y = e^X - k \Leftrightarrow Y = \text{Ln}(e^X - k)$.

Partie II :

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur R par :

$f_n(x) = e^{-nx}/(1 + e^x)$

1) $f_0(x) = 1/(1 + e^x)$
$f'_0(x) = -e^x/(1 + e^x)^2 < 0$
f_0 est décroissante de 1 (en $-\infty$) à 0 (en $+\infty$).
En $x = 0$, $f_0(x) = 1/2$.
$f'_0(0) = -1/4$

Soit S le point de coordonnées $(0, 1/2)$.

Faisons le changement d'origine pour un point courant $M(x, y)$ en prenant pour nouvelle origine S : $X = x$, $Y = y - 1/2$.
$y = 1/(1 + e^x) \Leftrightarrow Y + 1/2 = 1/(1 + e^X) \Leftrightarrow Y = 1/(1 + e^X) - 1/2 = (1 - e^X)/2(1 + e^X)$

Le symétrique de M par rapport à S donne le point $M'(-X, -Y)$.
$(1 - e^{-X})/2(1 + e^{-X}) = (e^X - 1)/2(1 + e^X) = -Y$.

2) On se place dans le cas général : $n \geq 1$.
$f_n'(x) = -e^{-nx}[n + (n+1)e^x]/(1 + e^x)^2 < 0$

La fonction $f_n(x)$ décroît donc de $+\infty$ (pour $x \to -\infty$) à 0 (pour $x \to +\infty$).
En $x = 0$, $f_n(0) = 1/2$ et $f_n'(0) = -(2n + 1)/4$

On remarque que pour $x = 0$, $y = 1/2$ pour tout n ; le point S appartient à toutes les courbes $\Gamma(n)$ associées aux fonctions f_n.

3) Pour tout n, on définit la suite v(n) par :

$$v(n) = \int_0^1 e^{-nx}\,dx$$

On peut faire le calcul explicite de v(n) ; en faisant le changement de variable $u = e^{-x}$, on obtient $v(n) = \int_{[1/e,\,1]} u^{n-1}du = (1 - e^{-n})/n$.

Pour montrer que v(n) est décroissante, il suffit de remarquer que $e^{-(n+1)x} = e^{-nx} \cdot e^{-x}$
Comme $x \in [0, 1]$, $e^{-x} \leq 1$ et donc $e^{-(n+1)x} \leq e^{-nx}$
En intégrant, on a donc de façon évidente : $v(n + 1) \leq v(n)$

A partir de la forme explicite de $v(n) = -(e^{-n} - 1)/n$, on a $v(n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

De même, $nv(n) = (1 - e^{-n}) \to 1$ quand $n \to +\infty$.

4) Pour tout n, on définit la suite u(n) par :

$$u(n) = \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

4a) Pour $x \in [0, 1]$, il est évident que $2 \leq e^x + 1 \leq 2e^x$
On en déduit : $1/2e^x \leq 1/(e^x + 1) \leq 1/2$

Et donc $f_n(x) = e^{-nx}/(1 + e^x)$ est entre $e^{-nx}/2e^x = e^{-(n+1)x}/2$ et $e^{-nx}/2$.

En intégrant f_n entre 0 et 1, on obtient : $v(n+1)/2 \leq u(n) \leq v(n)/2$, c'est-à-dire la double inégalité recherchée.

4b) Pour déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u(n)$, l'encadrement précédent et la question (3) permettent d'établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} u(n) = 0$.
De même, en multipliant par n, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} nu(n) = 1/2$.