ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les exercices et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

Soient x, y et z trois nombres réels strictement positifs vérifiant les relations suivantes :

$xyz > 1$

$x + y + z < (1/x) + (1/y) + (1/z)$

1) Montrer qu'aucun des réels x, y ou z n'est égal à 1

2) Montrer que l'un au moins des réels x, y, z est strictement supérieur à 1

3) Montrer que l'un au moins des réels x, y, z est strictement inférieur à 1

Exercice n° 2

Ln désigne le symbole des logarithmes népériens.
On considère l'application f de la variable réelle x définie par $f(x) = (x \,Lnx) / (x^2 - 1)^2$.

1) Calculer une primitive de f(x).
2) u étant un réel tel que u > 2, calculer l'intégrale $I(u) = \int_2^u f(x)\,dx$
3) Déterminer la limite de I(u) quand $u \to +\infty$

Les deux parties du problème sont également indépendantes, et peuvent aussi être traitées dans n'importe quel ordre.

Problème

Partie I :

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ par $f(x) = \text{Ln}(1 + e^x)$.

1) Etudier les variations de f : tableau de variations, limites, concavité, asymptotes ; tracer le graphe (C) de f.

2) On définit l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

2a) Soit la fonction g définie sur l'intervalle [0, 1] par $g(x) = (x^2 + 4x + 8\,\text{Ln}2)/8$.
On note $d(x) = g(x) - f(x)$.
Montrer que pour tout réel x appartenant à [0, 1], $0 \leq d(x) \leq M$, où M est un réel que l'on précisera à 10^{-3} près.

2b) En déduire un encadrement numérique de l'intégrale I.

3) k est un nombre réel non nul. On désigne par D(k) l'ensemble des solutions, sur R, de l'inéquation :

$$e^x + k > 0$$

Déterminer D(k).

4) A tout réel k, on associe la fonction f_k définie, pour $x \in D(k)$, par $f_k(x) = \text{Ln}(e^x + k)$. Etudier les variations de f_k.

5) Montrer que, pour k > 0, on a, pour tout x réel :

$$f_k(x + \text{Ln}k) = f(x) + \text{Ln}\,k$$

En déduire que la courbe C(k) représentative de f_k se déduit de la courbe C représentant f par une transformation géométrique simple que l'on précisera.

6) Soit Δ la première bissectrice, d'équation y = x.

Soit un point M de coordonnées (a, b) ; donner les coordonnées de M', image de M par une symétrie orthogonale par rapport à Δ.

On suppose que M appartient à la courbe C(k) associée à f_k ; donner l'équation de la courbe à laquelle appartient M', déduit de M par une symétrie orthogonale par rapport à Δ.
Construire la courbe C(– 1).

Partie II :

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur R par :

$$f_n(x) = e^{-nx}/(1 + e^x)$$

1) Etudier les variations de f_0.
Trouver les coordonnées du centre de symétrie S de la courbe C(0) représentant f_0.

2) On se place dans le cas général : $n \geq 1$.
Donner le tableau des variations de f_n.
Montrer que le point S appartient à toutes les courbes $\Gamma(n)$ représentant f_n.
Tracer Γ (1) ; préciser sa tangente au point S.

3) Pour tout n, on définit la suite v(n) par :

$$v(n) = \int_0^1 e^{-nx}\, dx$$

Calculer explicitement v(n) ; montrer que v(n) est décroissante.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v(n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nv(n)$

4) Pour tout n, on définit la suite u(n) par :

$$u(n) = \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

4a) Montrer que, $\forall\, x \in [0, 1] : 2 \leq e^x + 1 \leq 2e^x$
En déduire que, pour tout n, on a :

$$v(n+1) \leq 2u(n) \leq v(n)$$

4b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u(n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nu(n)$