AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème n° 1

1. $u_1 = 1/4 = 0{,}25$; $u_2 = 7/16 = 0{,}44$; $u_3 = 37/64 = 0{,}59$
$v_1 = 7/4 = 1,\ 75$; $v_2 = 25/16 = 1{,}56$; $v_3 = 91/64 = 1{,}42$

2. $u_{n+1} - u_n = (1 - u_n)/4$
Récurrence : $u_0 < 1$; supposons $u_n < 1$; alors $u_{n+1} < 1$
D'où $u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite (u_n) est croissante.

De même, $v_{n+1} - v_n = (1 - v_n)/4$
Récurrence : $v_0 > 1$; supposons $v_n > 1$; alors $v_{n+1} > 1$
D'où $v_{n+1} - v_n < 0$.
La suite (v_n) est décroissante.

$v_{n+1} - u_{n+1} = 3(v_n - u_n)/4$
Par récurrence : $v_0 > u_0$; supposons $v_n > u_n \Rightarrow v_{n+1} > u_{n+1}$

3. $s_{n+1} = (3s_n +2)/4$
$s_0 = s_1 = s_2 = 2$
On démontre facilement par récurrence que la suite (s_n) est constante, égale à 2.

4. $t_{n+1} = 3t_n/4$
Suite géométrique de raison 3/4 et de premier terme $t_n = 2$
D'où : $t_n = 2.(3/4)^n$

5. On a donc :
$u_n + v_n = 2$
$v_n - u_n = 2.(3/4)^n$
D'où : $v_n = 1 + (3/4)^n$ et $u_n = 1 - (3/4)^n$

6. Les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers 1

Problème n° 2

Partie I

1. $f_n'(x)$ est de la forme $v(x)/x^3$, avec $v(x) = n - 2 - 2n.Lnx$
$v(x) = 0 \Leftrightarrow x = \exp((n-2)/2n)$

On pose $u(n) = e^{(n-2)/2n}$

Si $x < u(n)$, $f_n'(x) > 0$
Si $x > u(n)$, $f_n'(x) < 0$
Si $x = u(n)$, $f_n'(x) = 0$

La fonction f_n est donc croissante de 0 à u(n) et décroissante ensuite.

2. $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + n.Lnx = 0 \Leftrightarrow Lnx = - 1/n$
D'où :
$a(n) = e^{-1/n} = 1/e^{1/n} < 1$
a(n) est une suite positive, $a(n+1)/a(n) = e^{1/n(n+1)} > 1$
a(n) est croissante, majorée par 1.
Quand $n \to +\infty$, $\lim e^{1/n} = 1$ et donc $\lim a(n) = 1$

3. Quand $x \to 0^+$, $f_n(x)$ tend vers $-\infty$ (x = 0 asymptote verticale)
Quand $n \to +\infty$, $f_n(x)$ tend vers 0 (y = 0 asymptote horizontale).
Le max M(n) de f_n est atteint pour x = u(n) : $M(n) = f_n(u(n))$.

$M(n) = n/(2\, e^{(n-2)/n}) = ne^{2/n}/2e$

	0		u(n)		$+\infty$
f_n'		+	0	-	
f_n	$-\infty$	$\uparrow$	M(n)	$\downarrow$	0

Par ailleurs, on remarque que $f_n(1) = 1$ pour tout n ; la famille des courbes représentant f_n passe donc par un point fixe (1, 1).

4. n = 2, u(2) = 1 ; M(2) = 1 ; a(2) = 0,61

n = 3, u(3) = 1,18 ; M(3) = 1,07 ; a(3) = 0,72

5. $D_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = Lnx/x^2$, indépendante de n.
On a donc la relation de récurrence $f_{n+1}(x) = f_n(x) + Lnx/x^2$.
On construit donc point par point la courbe représentant $f_{n+1}(x)$ en ajoutant à $f_n(x)$ la quantité Lnx/x^2.

Partie II

6. En intégrant par parties avec $u = Lnx$, $du = 1/x$, $dv = dx/x^2$, $v = -1/x$:
$I = -(1 + Lnx)/x$
L'aire A(n) est donnée par l'intégrale :

$A(n) = \int_1^e D_n(x)dx = \int_1^e g(x)dx$

$A(n) = (1 + Ln1)/1 - (1 + Lne)/e = (e - 2)/e = 0,26$

7. $B(n) = \int_{[1,e]} f_n(x)dx = \int_{[1,e]} 1/x^2\, dx + n \int_{[1,e]} Lnx/x^2\, dx = [-1/x]_{[1,e]} - n\, [(1 + Lnx)/x]_{[1,e]}$

$B(n) = 1 - 1/e + n(e - 2)/e = [(e - 1) + n(e - 2)]/e \approx 0,63 + 0,26n$

8. C'est une suite arithmétique : $B(n+1) - B(n) = (e - 2)/e$
On sait que $B(n) = [(e - 1) + n(e - 2)]/e$
$\lim B(n) = +\infty$

Partie III

9. On suppose maintenant $n \geq 3$.
$u(n) = e^{(n-2)/2n}$; $u(n) > 1$?
$u(n) > 1 \Leftrightarrow Ln\, u(n) > 0 \Leftrightarrow (n - 2)/2n > 0$, ce qui est vrai puisque $n \geq 3$.

Remarque : $u(n) = e^{1/2}.e^{-1/n} = e^{1/2}.a(n)$ où a(n) a été introduit à la question 2. On en déduit que quand $n \to +\infty$, u(n) tend vers $e^{1/2}$.

Soit $M(n) = f_n(u(n)) = n/(2\, e^{(n-2)/n}) = ne^{2/n}/2e$

Considérons la fonction $h(x) = xe^{2/x}/2e$ pour $x \geq 3$.

$h'(x) = (x - 2)e^{2/x}/2ex > 0$ pour $x \geq 2$.
h(x) est donc strictement croissante ; $h(2) = M(2) = 1$
D'où $M(n) > 1$.

10. On a vu à la question 3 que f_n était croissante de $-\infty$ à M(n) sur l'intervalle]0, u(n)], telle que $f_n(1) = 1$, puis décroissante de M(n) à 0 sur [u(n), + ∞[.
Comme $f_n(1) = 1$, $f_n(x) > 1$ sur le sous-intervalle]1, u(n)[.
L'équation E n'admet donc pas de solution sur]1, u(n)[.

11. f_n étant strictement décroissante de M(n) à 0 sur [u(n), + ∞[, avec $u(n) > 1$ et $M(n) > 1$ (question 9).
On en déduit que l'équation (E) $f_n(x) = 1$ admet une solution et une seule sur l'intervalle D = [u(n), +∞ [.

12. Soit $\alpha(n)$ la solution de (E).

$f_n(n^{1/2}) = (2 + n.Ln\, n)/2n = 1/n + (Ln\, n)/2$
Or pour $n \geq e^2$, $Ln\, n \geq 2$, donc $f_n(n^{1/2}) \geq 1 + 1/n > 1$

Comme $f_n(\alpha(n)) = 1$ par définition, on en déduit que $f_n(n^{1/2}) \geq f_n(\alpha(n))$; f_n étant décroissante sur [u(n), + ∞ [, on a bien $\alpha(n) \geq n^{1/2}$: cette inégalité reposant sur $n \geq e^2$ voisin de 7,4, et n étant entier, $n \geq 8$.

Comme $\alpha(n) \geq n^{1/2}$, on a : $\lim \alpha(n) = +\infty$.