

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES**ISE Option Économie****1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES****(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

Les deux problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème 1

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n , par :

$$u_0 = 0 ; u_{n+1} = (3u_n + 1)/4$$

$$v_0 = 2 ; v_{n+1} = (3v_n + 1)/4$$

1. Donner les valeurs numériques de (u_n) et (v_n) pour $n = 1, 2, 3$.
2. Etudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n) .
Montrer que, pour tout n , $u_n < v_n$.
3. On considère la suite $s_n = u_n + v_n$; calculer s_0, s_1, s_2 . Montrer que la suite (s_n) est une suite constante.
4. On considère la suite $t_n = v_n - u_n$.
Calculer t_{n+1} en fonction de t_n .
En déduire l'expression de t_n en fonction de n .
5. Déduire de ce qui précède les expressions de (u_n) et (v_n) en fonction de n .
6. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent et calculer leurs limites respectives.

Problème 2

Partie I

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$.

On considère les fonctions f_n définies pour $x > 0$ par :

$$f_n(x) = (1 + n \text{Ln} x) / x^2$$

1. Calculer la dérivée f_n' de f_n . Etudier le signe de $f_n'(x)$.
2. Donner la solution $a(n)$ de l'équation $f_n(x) = 0$. Etudier la suite $a(n)$ et trouver la limite de $a(n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.
3. Déterminer les limites de f_n quand $x \rightarrow 0_+$ et quand $x \rightarrow +\infty$.
Construire le tableau de variations de f_n . Donner la valeur $M(n)$ du maximum de f_n .
4. On note par C_n la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormé usuel. Tracer les courbes C_2 et C_3 sur le même graphe.
5. On définit la fonction $D_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Quelle est sa particularité ?
Expliquer très précisément comment il serait possible de construire point par point la courbe C_4 représentant f_4 .

Partie II

6. Soit $g(x)$ la fonction définie pour $x > 0$ par $g(x) = (\text{Ln} x) / x^2$.
Calculer l'intégrale indéfinie $I = \int g(x) dx$.
En déduire l'aire $A(n)$ du domaine délimité par les courbes C_n et C_{n+1} , les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.
7. On note par $B(n)$ l'aire du domaine délimité par la courbe C_n et les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = e$ et $y = 0$.
Calculer $B(n)$.
8. Etudier la nature de la suite $B(n)$. Que vaut la limite de $B(n)$ quand $n \rightarrow +\infty$?

Partie III

Dans cette partie, on suppose $n \geq 3$. On cherche à résoudre l'équation (E) $f_n(x) = 1$.

9. On pose $u(n) = e^{(n-2)/2n}$.
Montrer que, $\forall n \geq 3$, $u(n) > 1$.
Montrer également que, $\forall n \geq 3$, $f_n(u(n)) > 1$.

10. L'équation (E) $f_n(x) = 1$ a-t-elle une solution sur l'intervalle $]1, u(n)[$?
11. Démontrer que l'équation (E) $f_n(x) = 1$ admet une solution et une seule sur l'intervalle $D = [u(n), +\infty[$. On notera par $\alpha(n)$ cette solution.
12. On considère la suite $(\alpha(n))$, $n \geq 3$.
Montrer que pour $n \geq e^2$, on a : $f_n(n^{1/2}) \geq 1$.
En déduire que, pour $n \geq 8$, on a l'inégalité $\alpha(n) \geq n^{1/2}$.
Donner la limite de la suite $\alpha(n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.