Fomesoutra.com
ça soutra !

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 :

On appelle nombre parfait un nombre entier naturel a dont la somme des diviseurs est égale à 2a.

1) Parmi les entiers suivants, y en a-t-il de parfaits : 3, 6, 10, 14, 20, 28 ?

3 est divisible par 1 et 3 : 1 + 3 = 4 non parfait
6 est divisible par 1, 2, 3, 6 : 1 + 2 + 3 + 6 = 12 parfait
10 est divisible par 1, 2, 5, 10 / somme = 18 non parfait
14 est divisible par 1, 2, 7, 14 : somme = 24 non parfait
20 est divisible par 1, 2, 4, 5, 10, 20 : somme = 42 non parfait
28 est divisible par 1, 2, 4, 7, 14, 28 : somme = 56 parfait

2) Soit $a = 2^n (2^{n+1} – 1)$, $n \in N$. On suppose que $(2^{n+1} – 1)$ est premier. Montrer que a est un nombre parfait.

Notons $u = (2^{n+1} – 1)$.
a est divisible par $1, 2, 2^2, \dots, 2^n, u, 2u, 2^2u, \dots, 2^nu$.

La somme des diviseurs de a est donc : $S = 1 + 2 + 2^2 +\dots+ 2^n + u + 2u + 2^2u + \dots+ 2^nu$.
Soit $A = 1 + 2 + 2^2 +\dots+ 2^n$, et $B = u + 2u + 2^2u + \dots+ 2^nu$.

$A = (1 – 2^{n+1})/(1 – 2) = 2^{n+1} – 1$

$B = uA = u(2^{n+1} – 1)$
$S = A + B = A(1 + u) = (2^{n+1} – 1)(1 + u) = (2^{n+1} – 1)2^{n+1} = 2.(2^{n+1} – 1)2^n = 2a$

Exercice 2 :

On appelle nombre polymonadique tout nombre entier ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 : 1, 11, 111, etc. On note P(n) le nombre polymonadique s'écrivant avec n chiffres 1.

1) Montrer que $P(n) = (10^n - 1)/9$

$P(n) = 10^{n-1} + 10^{n-2} + ... + 10 + 1 = (1 - 10^n)/(1 - 10) = (10^n - 1)/9$

2) Montrer que, pour n pair, P(n) est divisible par 11

On sait que $(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + ...+ b^{n-2}a + b^{n-1}) = (a - b)Q_n(a, b)$
Soit $n = 2p$
$P(2p) = (10^{2p} - 1)/9 = (10^{2p} - 1^{2p})/9 = (100^p - 1^p)/9 = (100 - 1)Q(100, 1)/9 = 11Q_p(100,1)$ est donc divisible par 11.

3) Montrer que pour m entier, si m divise n, P(m) divise P(n).

Soit $n = qm$.
$P(n) = (10^{qm} - 1)/9 = ((10^m)^q - 1^q)/9 =(10^m - 1)Q(10^m, 1)/9 = P(m)Q_q(10^m, 1)$

4) En déduire que si P(n) est un nombre premier, alors n est premier.

P(n) divisible par lui-même ou 1 : P(n) = 1.P(n)
Soit P(m) = 1, et donc m = 1 et q = n
Soit P(m) = P(n), et donc m = n et q = 1
P(n) premier $\Rightarrow$ n premier

5) Etudier P(5). Qu'en est-il de la réciproque du résultat de la question (4) ?

$P(5) = (10^5 - 1)/9 = 11\ 111 = 41 \times 271$, non premier. Or 5 est premier.
n premier n'implique pas P(n) premier.

Problème :

Préambule :

Soit u_n, $n \in N^*$, la suite définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1$, avec $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.
Il est évident par récurrence que la suite u_n est positive et croissante.

Partie A :

1) On définit la suite v_n, $n > 0$, par : $v_n = u_n + 1$.
Ecrire la relation existant entre v_{n+2}, v_{n+1} et v_n. Montrer que la suite v_n est positive et croissante.

$u_n = v_n – 1$ d'où un reportant dans l'équation de définition de u_n :
$v_{n+2} – 1 = v_{n+1} – 1 + v_n – 1 +1$
$v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ avec $v_1 = 2$ et $v_2 = 3$.
On reconnaît la suite de léonard de Pise, dit Fibonacci (XIIIème xiècle).

Remarque : il est évident que les suites u_n et v_n sont positives et croissantes (sommes de termes positifs).

2) Donner l'expression de v_n en fonction de n.

L'équation caractéristique associée est $r^2 – r – 1 = 0$.
Ses racines sont :
$r_1 = (1 - \sqrt{5})/2$ et $r_2 = (1 + \sqrt{5})/2$

La forme générale de v_n est : $v_n = a (r_1)^n + b(r_2)^n$
$v_1 = 2 = ar_1 + br_2 \Rightarrow a(1 - \sqrt{5}) + b(1 + \sqrt{5}) = 4$

$v_2 = 3 = a (r_1)^2 + b(r_2)^2 \Rightarrow a(3 - \sqrt{5}) + b(3 + \sqrt{5}) = 6$

D'où $a = (5 - 3\sqrt{5})/10$ et $b = (5 + 3\sqrt{5})/10$

3) En raisonnant par récurrence, démontrer les relations suivantes :

(R1) $(v_{2n})^2 = v_{2n-1}.v_{2n+1} – 1$

(R2) $(v_{2n+1})^2 = v_{2n}.v_{2n+2} + 1$

On sait que $v_1 = 2$, $v_2 = 3$, $v_3 = 5$, et $v_4 = 8$.
$3^2 = 2 \times 5 – 1$; R1 est vérifiée pour n = 1.
De même pour R2, $5^2 = 3 \times 8 + 1$.
Supposons R1 et R2 vraies au rang n.

$(v_{2n+2})^2 = v_{2n+2} (v_{2n+1} + v_{2n}) = v_{2n+2}.v_{2n+1} + v_{2n+2}.v_{2n} = v_{2n+2}.v_{2n+1} + (v_{2n+1})^2 - 1$
$= v_{2n+1} (v_{2n+2} + v_{2n+1}) - 1$
$= v_{2n+1}.v_{2n+3} - 1$
$\Rightarrow$ R1 est vraie au rang n+1

De même, $(v_{2n+3})^2 = v_{2n+3}(v_{2n+2} + v_{2n+1}) = v_{2n+3}.v_{2n+2} + v_{2n+3}.v_{2n+1}$
$= v_{2n+3}.v_{2n+2} + (v_{2n+2})^2 + 1$
$= v_{2n+2}.(v_{2n+3} + v_{2n+2}) + 1$
$= v_{2n+2}.v_{2n+4} + 1$
$\Rightarrow$ R2 est vraie au rang n+1

4) Déduire de la question (3) la relation :

$$(R3) \quad (u_{2n+1} - u_{2n-1})^2 = u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$$

On a : $v_{2n} = (v_{2n+1} - v_{2n-1}) = (u_{2n+1} - u_{2n-1})$
D'après (R1) : $(v_{2n})^2 = (u_{2n+1} - u_{2n-1})^2 = (u_{2n+1} + 1)(u_{2n-1} + 1) - 1 = u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$.

5) Montrer la relation (R4) et en déduire (R5):

$$(R4) \quad (u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = 5u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$$

$$(R5) \quad 5u_{2n-1}.u_{2n+1} = (u_{2n+1} + u_{2n-1})(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)$$

De façon évidente, on a :
$(u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = (u_{2n+1} - u_{2n-1})^2 + 4u_{2n-1}.u_{2n+1}$
D'après le résultat de la question 4, on a donc :
$(u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1} + 4u_{2n-1}.u_{2n+1}$
D'où (R4) : $(u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = 5u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$

La relation R5 est évidente :
$5u_{2n-1}.u_{2n+1} = (u_{2n-1} + u_{2n+1})^2 - (u_{2n+1} + u_{2n-1}) = (u_{2n+1} + u_{2n-1})(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)$

Partie B :

L'objectif de cette partie est d'utiliser les résultats de la partie A pour étudier l'existence de nombres premiers dans la suite u_n, ayant un rang impair.

6) A partir de la relation (R5), démontrer que si u_{2n-1} est premier, il divise soit u_{2n+1}, soit $u_{2n+1} - 1$.

Soit donc la relation (R5) : $5u_{2n-1}.u_{2n+1} = (u_{2n+1} + u_{2n-1})(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)$.
Si u_{2n-1} est premier, il divise soit $(u_{2n+1} + u_{2n-1})$, soit $(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)$.
On a donc :
$(u_{2n+1} + u_{2n-1}) = a.\ u_{2n-1}$
ou : $u_{2n+1} = (a - 1)\ u_{2n-1}$
De même : $(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1) = b.\ u_{2n-1}$
ou encore : $(u_{2n+1} - 1) = (b - 1).\ u_{2n-1}$

7) On considère le premier cas : u_{2n-1} divise u_{2n+1}, c'est-à-dire $u_{2n+1} = q.\ u_{2n-1}$, q entier.

7a) Montrer que q > 1.

Evident : la suite (u_n) est croissante.

7b) A partir de (R4), en déduire : (R6) $(q^2 - 3q + 1)\ u_{2n-1} = 1 + q$

Rappelons la relation (R4) : $(u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = 5u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$
Remplaçons u_{2n+1} par q. u_{2n-1} : $(1 + q)^2(u_{2n-1})^2 = 5q(u_{2n-1})^2 + u_{2n-1} + q.\ u_{2n-1}$
Il s'en suit, en simplifiant : $(q^2 - 3q + 1)\ u_{2n-1} = 1 + q$

7c) Montrer que les seules valeurs possibles pour q dans la relation (R6) sont q = 3 ou 4. Le terme u_{2n-1} est-il alors un nombre premier ?

Le trinôme $(q^2 - 3q + 1)$ est positif si $q < (3 - \sqrt{5})/2 = 0{,}38$ ou $q > (3 + \sqrt{5})/2 = 2{,}62$, c'est-à-dire comme q est entier si q = 0 ou $q \geq 3$.
Donc q = 1 ou 2 conduit à u_{2n-1} négatif, ce qui est impossible.
On remarque ensuite que pour q > 4, le rapport $u_{2n-1} = (1 + q)/(q^2 - 3q + 1)$ est inférieur à 1 ; impossible encore.
Les seules valeurs possibles pour q sont donc q = 3 ou q = 4.

Pour q = 3, $u_{2n-1} = 4$: non premier
Pour q = 4, $u_{2n-1} = 1$: non premier (par convention)

8) Dans cette question, on considère le deuxième cas : u_{2n-1} divise $u_{2n+1} - 1$, c'est à dire que l'on a $(u_{2n+1} - 1) = q'.\ u_{2n-1}$, q' entier.

8a) Montrer que q' > 1.

Evident.

8b) Démontrer (R7) $(q'^2 - 3q' + 1)\ u_{2n-1} = 4 - q'$

Partons de la relation (R5) : $5u_{2n-1}.u_{2n+1} = (u_{2n+1} + u_{2n-1})(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)$.
Il suffit de remplacer u_{2n+1} par 1 + q'. u_{2n-1} pour établir la relation (R7).

8c) Montrer que la seule valeur possible pour q' dans la relation (R7) est q' = 3 ? Dans ce cas, le terme u_{2n-1} est-il alors un nombre premier ?

Soit donc $(q'^2 - 3q' + 1)\ u_{2n-1} = 4 - q$.
Comme pour la question 7c, le trinôme $(q'^2 - 3q' + 1)$ est positif si q' = 0 (impossible) ou $q' \geq 3$.
Or pour $q' \geq 4$, $4 - q' \leq 0$, donc $u_{2n-1} \leq 0$, ce qui est impossible.
Seule valeur possible : $q' = 3 \Rightarrow u_{2n-1} = 1$, non premier par convention.

9) Un terme de rang impair de la suite u_n peut-il être un nombre premier ?

On déduit des questions 7 et 8 qu'aucun terme de rang impair de la suite u_n ne peut être premier.

Partie C :

L'objectif de cette partie est d'utiliser les résultats de la partie A pour étudier l'existence de nombres premiers dans la suite u_n ayant un rang pair.

10) En utilisant la relation (R2), démontrer :

(R8) $[(u_{2n+2} + 1) + (u_{2n} + 1)]^2 = 5(u_{2n} + 1)(u_{2n+2} + 1) + 1$

En déduire :

(R9) $5u_{2n}.u_{2n+2} = (u_{2n} + u_{2n+2} – 2)(u_{2n} + u_{2n+2} + 1)$

Considérons (R2) : $(v_{2n+1})^2 = v_{2n}.v_{2n+2} + 1$

$v_{2n+1}= v_{2n+2} - v_{2n}$
D'où : $(v_{2n+1})^2 = (v_{2n+2} - v_{2n})^2 = (v_{2n+2} + v_{2n})^2 - 4v_{2n+2}.v_{2n} = v_{2n}.v_{2n+2} + 1$
$\Rightarrow (v_{2n+2} + v_{2n})^2 = [(u_{2n+2} + 1) + (u_{2n} + 1)]^2 = 5v_{2n+2}.v_{2n} + 1 = 5(u_{2n} + 1)(u_{2n+2} + 1) + 1$

Pour démontrer (R9), on part de (R8) :
$[(u_{2n+2} + 1) + (u_{2n} + 1)]^2 = 5(u_{2n} + 1)(u_{2n+2} + 1) + 1 \Leftrightarrow (u_{2n+2} + u_{2n} + 3)(u_{2n+2} + u_{2n} + 1) = 5(u_{2n} + 1)(u_{2n+2} + 1)$
$\Leftrightarrow (u_{2n+2} + u_{2n} + 3)(u_{2n+2} + u_{2n} + 1) = 5u_{2n}.u_{2n+2} + 5 + 5(u_{2n} + u_{2n+2})$

$\Leftrightarrow 5u_{2n}.u_{2n+2} = - 5(1 + u_{2n} + u_{2n+2}) + (u_{2n+2} + u_{2n} + 3)(u_{2n+2} + u_{2n} + 1)$

$\Leftrightarrow 5u_{2n}.u_{2n+2} = (u_{2n} + u_{2n+2} – 2)(u_{2n} + u_{2n+2} + 1)$

11) Démontrer alors que si u_{2n} est premier, il divise $u_{2n+2} – 2$ ou $u_{2n+2} +1$.

D'après (R9), u_{2n} divise soit $(u_{2n} + u_{2n+2} – 2)$, soit $(u_{2n} + u_{2n+2} + 1)$.
Ecrivons que u_{2n} divise $(u_{2n} + u_{2n+2} – 2)$: alors il existe un nombre entier a tel que :
$(u_{2n} + u_{2n+2} – 2) = a. u_{2n} \Leftrightarrow (u_{2n+2} – 2) = (a – 1).u_{2n}$
De même, il existe b tel que $(u_{2n+2} +1) = (b – 1).u_{2n}$

12) On considère le premier cas : u_{2n} divise $u_{2n+2} – 2$, c'est-à-dire $(u_{2n+2} – 2) = q.\ u_{2n}$, q entier.

12a) Montrer que $q > 1$.

Suite croissante et telle que $u_{2n+2} – u_{2n} > 2$.

12b) Démontrer : (R10) $(q^2 – 3q + 1)\ u_{2n} = 7 – 3q$

En remplaçant u_{2n+2} par $2 + q.\ u_{2n}$ dans l'expression (R9), on obtient (R10) sans difficulté.

12c) Existe-t-il au moins une valeur de q donnant un sens à (R10) ?

On sait que le trinôme $(q^2 – 3q + 1)$ est positif si $q = 0$ (impossible) ou $q \geq 3$. Or pour $q \geq 3$, $7 – 3q < 0$, donc u_{2n} serait < 0, ce qui est impossible.
Si $q = 1$ ou $q = 2$, on a aussi $u_{2n} < 0$.

13) On considère le deuxième cas : u_{2n} divise $u_{2n+2} + 1$, c'est-à-dire $(u_{2n+2} + 1) = q'\ u_{2n}$, q' entier.

13a) Montrer que $q' > 1$.

Suite croissante.

13b) Démontrer : (R11) $(q'^2 – 3q' + 1)\ u_{2n} = 3q' – 2$

Comme en (12b), en remplaçant u_{2n+2} par $q'.\ u_{2n} – 1$ dans l'expression (R9), on obtient aisément (R11).

13c) Montrer que les seuls cas possibles sont q' = 3, 4 ou 5. Déterminer alors le(s) seul(s) termes nombre(s) premier(s) de la suite u_n.

$q' = 1$ ou $2 \Rightarrow u_{2n} < 0$
Dès que $q' > 5$, $u_{2n} < 1$
Donc seuls cas possibles : q' = 3, 4 ou 5
Si $q' = 3$, $u_{2n} = 7$, premier
Si $q' = 4$, $u_{2n} = 2$, premier
Si $q' = 5$, $u_{2n} = 13/11 \Rightarrow$ impossible

Les seuls nombres premiers de la suite de Fibonacci sont donc 2 et 7.