ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les exercices et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

L'épreuve traitant en partie de la divisibilité et des nombres premiers, on rappelle donc en préambule que :

- a et b étant deux nombres entiers naturels, b > 0, b divise a s'il existe q $\in$ N tel que a = bq,

- un nombre entier naturel a est premier s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même,

- deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun est 1,

- le chiffre 1 n'est pas considéré comme un nombre premier.

Exercice 1

On appelle *nombre parfait* un nombre entier naturel a dont la somme des diviseurs est égale à 2a.

1) Parmi les entiers suivants, y en a-t-il de parfaits : 3, 6, 10, 14, 20, 28 ?

2) Soit $a = 2^n (2^{n+1} - 1)$, $n \in N$. On suppose que $(2^{n+1} - 1)$ est premier. Montrer que a est un nombre parfait.

Exercice 2

On appelle nombre polymonadique tout nombre entier ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 : 1, 11, 111, etc. On note P(n) le nombre polymonadique s'écrivant avec n chiffres 1.

1) Montrer que $P(n) = (10^n - 1)/9$.

2) Montrer que, pour n pair, P(n) est divisible par 11.

3) Montrer que pour m entier, si m divise n, P(m) divise P(n).

4) En déduire que si P(n) est un nombre premier, alors n est premier.

5) Etudier P(5). Qu'en est-il de la réciproque du résultat de la question (4) ?

Problème

Ce problème comporte trois parties ; la partie A établit des résultats généraux qui seront utilisés dans les parties B et C.

Préambule :

Soit u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, la suite définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1$, avec $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.
Montrer que la suite u_n est positive et croissante.

Partie A :

1) On définit la suite v_n, $n > 0$, par : $v_n = u_n + 1$. Ecrire la relation existant entre v_{n+2}, v_{n+1} et v_n. Montrer que la suite v_n est positive et croissante.

2) Donner l'expression précise de v_n en fonction de n.

3) En raisonnant par récurrence, démontrer les relations suivantes :

(R1) $(v_{2n})^2 = v_{2n-1}.v_{2n+1} - 1$

(R2) $(v_{2n+1})^2 = v_{2n}.v_{2n+2} + 1$

4) Déduire de la question (3) la relation :

(R3) $(u_{2n+1} - u_{2n-1})^2 = u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$

5) Montrer la relation (R4) et en déduire (R5):

(R4) $(u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = 5u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$

(R5) $5u_{2n-1}.u_{2n+1} = (u_{2n+1} + u_{2n-1})(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)$

Partie B :

L'objectif de cette partie est d'utiliser les résultats de la partie A pour étudier l'existence de nombres premiers dans la suite u_n, ayant un rang impair.

6) A partir de la relation (R5), démontrer que si u_{2n-1} est premier, il divise soit u_{2n+1}, soit $u_{2n+1} - 1$.

7) On considère le premier cas : u_{2n-1} divise u_{2n+1}, c'est-à-dire $u_{2n+1} = q.\ u_{2n-1}$, q entier.

> 7a) Montrer que $q > 1$.
>
> 7b) A partir de (R4), en déduire : (R6) $(q^2 - 3q + 1)\ u_{2n-1} = 1 + q$
>
> 7c) Montrer que les seules valeurs possibles pour q dans la relation (R6) sont $q = 3$ ou 4. Le terme u_{2n-1} est-il alors un nombre premier ?

8) Dans cette question, on considère le deuxième cas : u_{2n-1} divise $u_{2n+1} - 1$, c'est-à-dire que l'on a $(u_{2n+1} - 1) = q'.\ u_{2n-1}$, q' entier.

> 8a) Montrer que $q' > 1$.
>
> 8b) Démontrer (R7) $(q'^2 - 3q' + 1)\ u_{2n-1} = 4 - q'$
>
> 8c) Montrer que la seule valeur possible pour q' dans la relation (R7) est $q' = 3$. Dans ce cas, le terme u_{2n-1} est-il alors un nombre premier ?

9) Un terme de rang impair de la suite u_n peut-il être un nombre premier ?

Partie C :

L'objectif de cette partie est d'utiliser les résultats de la partie A pour étudier l'existence des nombres premiers de la suite u_n ayant un rang pair.

10) En utilisant la relation (R2), démontrer :

> (R8) $[(u_{2n+2} + 1) + (u_{2n} + 1)]^2 = 5(u_{2n} + 1)(u_{2n+2} + 1) + 1$

En déduire :

> (R9) $5u_{2n}.u_{2n+2} = (u_{2n} + u_{2n+2} - 2)(u_{2n} + u_{2n+2} + 1)$

11) Démontrer alors que si u_{2n} est premier, il divise $u_{2n+2} - 2$ ou $u_{2n+2} +1$.

12) On considère le premier cas : u_{2n} divise $u_{2n+2} - 2$, c'est-à-dire $(u_{2n+2} - 2) = q.\ u_{2n}$, q entier.

> 12a) Montrer que $q > 1$.
>
> 12b) Démontrer : (R10) $(q^2 - 3q + 1)\ u_{2n} = 7 - 3q$
>
> 12c) Existe-t-il au moins une valeur de q donnant un sens à (R10) ?

13) On considère le deuxième cas : u_{2n} divise $u_{2n+2} + 1$, c'est-à-dire $(u_{2n+2} + 1) = q' u_{2n}$, q' entier.

13a) Montrer que $q' > 1$.

13b) Démontrer : (R11) $(q'^2 - 3q' + 1) u_{2n} = 3q' - 2$

13c) A partir de (R11), montrer que les seuls cas possibles sont $q' = 3$, 4 ou 5. Déterminer alors le(s) seul(s) terme(s) nombre(s) premier(s) de la suite u_n.