AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée d'un exercice et deux problèmes, indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.-

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.

Exercice :

On considère la suite u(n) définie sur l'ensemble des nombres entiers naturels par la relation :
$u(n+1) = u(n)\, e^{-u(n)}$
avec comme valeur initiale u(0) = 1.

Pour tout n entier, la suite v(n) est définie par la relation :

$$v(n) = \sum_{p=0}^{n} u(p)$$

1) Etudier le signe et le sens de variation de u(n).

Montrons par récurrence la positivité de u(n) :

- Vraie au niveau 0 : u(0) = 1

- Soit la propriété vraie au rang n : u(n) > 0

Comme $u(n+1) = u(n)\, e^{-u(n)}$ et que $e^{-u(n)} > 0$, on a donc u(n+1) > 0.

Par ailleurs : $u(n+1)/u(n) = e^{-u(n)} < 1$

La suite u(n) est donc décroissante.

2) Trouver la limite de u(n) quand $n \to +\infty$.

Comme u(n) est décroissante et minorée, elle converge.

Soit a la limite de u(n).
a vérifie l'équation $a = a.e^{-a}$ ou encore $a.(1 - e^{-a}) = 0$.
Or $(1 - e^{-a}) \neq 0 \Rightarrow a = 0$

3) Montrer que u(n+1) = f(v(n)), où f est une fonction que l'on explicitera.
En déduire la limite de v(n) quand n $\to +\infty$.

Partant de $u(n+1) = u(n)\, e^{-u(n)}$, …., $u(1) = u(0)\, e^{-u(0)}$ et en multipliant toutes ces égalités membre à membre, on obtient :

$u(n+1) = u(0)\, e^{-v(n)} = e^{-v(n)}$

$v(n) = -\,\mathrm{Ln}\, u(n+1)$

Quand n $\to +\infty$, u(n) tend vers 0 et donc v(n) tend vers $+\infty$.

Problème 1 :

On donne : Ln3 = 1,099.

Partie I :

Soit φ la fonction définie sur] 0, $+\infty$[par :

$$\varphi(x) = \mathrm{Ln}x / x$$

Etudier les variations de φ et donner très précisément son tableau de variation.
Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.
Tracer le graphe de φ.

Dérivée première :
$\varphi'(x) = (1 - \mathrm{Ln}x)/x^2$

$\varphi'(x) = 0$ pour $x = e$; $\varphi'(x) > 0$ pour $x < e$ et <0 pour $x > e$.
φ est donc croissante pour $x < e$ et décroissante pour $x > e$.
Le maximum M de φ est atteint en $x = e$ et vaut $\varphi(e) = M = 1/e \approx 0,368$

Dérivée seconde :
$\varphi''(x) = (2\mathrm{Ln}x - 3)/x^3$

Le point d'inflexion est atteint en $\varphi''(x) = 0$, soit pour $x = e^{3/2} \approx 4,481$, et $\varphi(e^{3/2}) \approx 0,335$.

Limites :
Quand x $\to +\infty$, $\varphi(x)$ tend vers 0 (y = 0 est asymptote horizontale).
Quand x $\to 0$ par valeurs supérieures, $\varphi(x) \to -\infty$.

Points caractéristiques :

Outre le maximum et le point d'inflexion, on remarque que $\varphi(1) = 0$.
La courbe représentant φ coupe l'axe des abscisses au point A (1, 0) ; en ce point, la pente est $\varphi'(1) = 1$.
L'équation de la tangente en A est $y = x - 1$.

Partie II :

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.

1) Calculer a^b et b^a pour a = 2 et b = 3, pour a = 4 et b = 2, et pour a = Ln3 et b = 3.

Pour a = 2 et b = 3 : $a^b = 8$, $b^a = 9$.
Pour a = 4 et b = 2, $a^b = 16$, $b^a = 16$.
Pour a = Ln3 et b = 3, $a^b = 1{,}327$, $b^a = 3{,}345$.

2) Montrer que comparer a^b et b^a revient à rechercher le signe de $ab(\varphi(a) - \varphi(b))$.

Comparer a^b et b^a revient à comparer à 1 le rapport $R = a^b / b^a$.

$R > 1 \Leftrightarrow \text{LnR} > 0 \Leftrightarrow b.\text{Ln}a - a.\text{Ln}b > 0 \Leftrightarrow ab(\text{Ln}a/a - \text{Ln}b/b) > 0 \Leftrightarrow ab(\varphi(a) - \varphi(b)) > 0$.

Comme a et b > 0, $R > 1 \Leftrightarrow a^b > b^a \Leftrightarrow \varphi(a) - \varphi(b) > 0$.
Inversement, $R < 1 \Leftrightarrow a^b < b^a \Leftrightarrow \varphi(a) - \varphi(b) < 0$.
Et $R = 1 \Leftrightarrow a^b = b^a \Leftrightarrow \varphi(a) - \varphi(b) = 0$.

3) En déduire la comparaison de a^b et b^a dans les cas suivants :

3a) $0 < a < b \leq e$
3b) $e \leq a < b$

Compte tenu des variations de la fonction φ vues à la question 1, pour $0 < a < b \leq e$, comme on sait que φ est croissante pour $x < e$, on a $\varphi(a) < \varphi(b)$ et donc $a^b < b^a$ d'après les résultats de la question 2.

De même, pour $e \leq a < b$, comme φ est décroissante pour $x > e$, on a $\varphi(a) > \varphi(b)$ et donc $a^b > b^a$.

4) Sans faire le moindre calcul, comparer π^e et e^π.

Comme $e < \pi$, on est dans les conditions de la question (3b) et donc $e^\pi > \pi^e$.

5) Montrer que pour tout a > e, il existe un réel b appartenant à l'intervalle]1, e [tel que $\varphi(b) = \varphi(a)$. En déduire que $a^b = b^a$.

Soit a > e. On sait que φ est croissante de $-\infty$ à M = 0,368 pour x < e, passe par un maximum M = 0,368 en x = e et décroît ensuite de 0,368 vers 0.
Pour a > 0, $0 < \varphi(a) < M$; compte tenu de la croissance stricte et de la continuité de φ pour x < e, et de sa positivité pour 1 < x < e, on en déduit qu'il existe donc un et un seul nombre $b \in \,]1, e[$ tel que $\varphi(b) = \varphi(a)$.
Au vu des résultats de la question 2, on a bien $a^b = b^a$ pour ce couple (a, b).

Fomesoutra.com
ça soutra !

Partie III :

On prend maintenant a = 3, et on cherche à résoudre l'équation $3^x = x^3$.

1) Soit g la fonction définie sur] 0, $+\infty$[par :

$$g(x) = 3Lnx - xLn3$$

Etudier les variations de g.

On remarque a = 3 > e. On est ainsi dans les conditions de la question 4 de la partie II.

$$3^x = x^3 \Leftrightarrow 3Lnx - xLn3 = g(x) = 0.$$

$$g'(x) = (3 - xLn3)/3$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3/Ln3 \approx 2{,}730.$$

g est croissante pour $0 < x < 3/Ln3$, passe par un maximum $\approx 0{,}012$, puis décroît.

En outre : $g(x) \to -\infty$ quand $x \to 0$, et $g(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

2) Etablir l'existence de deux réels x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$, tels que $g(x_1) = g(x_2) = 0$.
Donner la valeur (évidente) de x_2.
En déduire une valeur approchée de la solution de l'équation $3^x = x^3$.

D'après les résultats de la question précédente, la courbe représentative de g continue coupe donc l'axe des abscisses en deux points x_1 et x_2, tels que $g(x_1) = g(x_2) = 0$, avec $x_1 < 3/Ln3 = 2{,}730 < x_2$.

Une solution évidente aux équations $3^x = x^3 \Leftrightarrow 3Lnx - xLn3 = g(x) = 0$ est $x = 3 = x_2$.

Pour trouver x_1, on procède par itération :

$$g(2{,}5) = 0{,}0005 > 0$$

$$g(2{,}45) = -0{,}0045 < 0$$

$$g(2{,}49) = -0{,}0005 < 0$$

$2{,}49 < x_1 < 2{,}50$

On peut approximer x_1 par 2,495, ou bien poursuivre l'itération avec 3 décimales, ce qui conduit à 2,498.

Problème 2 :

N est l'ensemble des entiers naturels, N* = N – {0} ; Z est l'ensemble des entiers relatifs ; R est l'ensemble des nombres réels.

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle.
On suppose que, pour tout $(x,y) \in R^2$, f vérifie la relation (E) :

(E) $f(x+y) = [f(x) + f(y)] / [1 + f(x)f(y)]$

1) Montrer que s'il existe un nombre réel a tel que f(a) = 1 ou f(a) = – 1, la fonction f est constante sur R.
Dans toute la suite, on supposera f non constante.

Soit a tel que f(a) = 1.
Alors $f(x+a) = [f(x) + 1] / [1 + f(x)] = 1\ \forall x$, donc la fonction f est constante et égale à 1.

De même, s'il existe a tel que f(a) = – 1, il est facile de montrer que f est constante et égale à – 1.

2) On écrit x = (x/2) + (x/2).

2a) Montrer que $-1 < f(x) < 1,\ \forall x \in R$

2b) Montrer que f(0) = 0

2c) Montrer que f est impaire

2a) $f(x) = f((x/2) + (x/2)) = 2f(x/2) / (1 + f^2(x/2))$

Or $(1 - u)^2 = 1 + u^2 - 2u > 0 \Leftrightarrow 2u < 1 + u^2$ et $(1 + u)^2 = 1 + u^2 + 2u > 0 \Leftrightarrow 2u > -(1 + u^2)$, soit : $-(1 + u^2) < 2u < (1 + u^2)$
D'où : $-1 < 2u/(1 + u^2) < 1$.
En posant u = f(x/2), on obtient donc $-1 < f(x) < 1$.

2b) Faisons x = 0 dans la relation précédente :
$f(0) = 2f(0)/(1 + f^2(0)) \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) - 1) = 0$.
Comme $-1 < f(x) < 1,\ \forall x \in R$, $f^2(0) - 1 \neq 0$ d'où f(0) = 0.

2c) $f(x - x) = f(0) = 0 = (f(x) + f(-x))/(1 + f(x).f(-x)) \Leftrightarrow f(x) + f(-x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = -f(-x)$.
f est donc comprise strictement entre – 1 et 1, s'annule en 0 et est impaire.

3) On pose $g(x) = [1 + f(x)]/[1 - f(x)]$.

3a) Démontrer par récurrence que, pour tout réel x et pour tout entier n strictement positif :

$g(nx) = g^n(x)$

- Propriété vraie par construction pour n = 1

- Supposons $g(nx) = g^n(x)$ et montrons que $g((n+1)x) = g^{n+1}(x)$

Par définition, $g((n+1)x) = [1 + f((n+1)x)]/ [1 - f((n+1)x)]$
Or $f((n+1)x) = [f(nx) + f(x)] / [1 + f(nx)f(x)]$.
Reportons cette expression de $f((n+1)x)$ dans la définition de $g((n+1)x)$:

$$g((n+1)x) = [1 + f(nx)f(x) + f(nx) + f(x)]/ [1 + f(nx)f(x) - f(nx) - f(x)]$$

$$g((n+1)x) = (1 + f(nx))(1 + f(x))//(1 - f(nx))(1 - f(x)) = g(nx).g(x) = g^{n+1}(x)$$

3b) On note $\lambda = g(1)$. Pour tout entier n naturel, donner la valeur de f(n) en fonction de λ.

On a : $g(nx) = g^n(x)$. Posons x = 1: $g(n) = g^n(1) = \lambda^n$.

Comme $g(n) = [1 + f(n)]/[1 - f(n)] = \lambda^n$, on en déduit :

$1 + f(n) = \lambda^n(1 - f(n))$
$\Rightarrow f(n) = (\lambda^n - 1) / (\lambda^n + 1)$

3c) En déduire f(n) pour tout n appartenant à Z, ensemble des nombres entiers relatifs.

On a démontré que f est impaire.
Soit $p \in Z$.

Si $p > 0$, la formule de la question (3b) s'applique.
Si $p < 0$, $f(p) = - f(-p) = - (\lambda^{-p} - 1) / (\lambda^{-p} + 1) = (\lambda^p - 1) / (\lambda^p + 1)$

Donc $\forall\ p \in Z$, $f(p) = (\lambda^p - 1) / (\lambda^p + 1)$

4) On suppose maintenant, et pour toute la suite de l'énoncé, que f, en plus de vérifier la relation (E), est dérivable au point 0. On note d la dérivée de f en 0.

4a) Montrer que f est dérivable en tout point réel x et que $f'(x) = d(1 - f^2(x))$.

Par définition, la dérivée de f en un point x est $\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x))/h$.

$\forall x \quad f(x+h) = (f(x) + f(h)) / (1 + f(x)f(h))$

D'où $(f(x+h) - f(x))/h = f(h)[1 - f^2(x)]/h(1 + f(x)f(h))$

Quand h tend vers 0, $f(h)/h$ tend vers d, et $f(h)$ tend vers 0.

Donc $\forall x \lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x))/h = f'(x) = d(1 - f^2(x))$

4b) Le nombre d peut-il être nul ?

Si $d = 0$, $f'(x) = 0 \; \forall x$, donc $f(x)$ est une constante, ce qui est contraire à la convention prise à la question 1.

4c) Montrer que f est monotone sur R.

Puisque que $-1 < f(x) < 1$, $\forall x \in R$ (question 2a), $1 - f^2(x) > 0$. le signe de f' est donc celui de la constante d, dérivée de f au point 0.
La fonction f est monotone (croissante si $d > 0$, décroissante si $d < 0$).

5) On note f^{-1} la fonction réciproque de f. On admet que f^{-1} est dérivable sur $]-1, 1[$.

5a) Donner l'expression de la dérivée de f^{-1} en tout point de $]-1, 1[$.

f^{-1}, fonction réciproque de f, existe car f est continue, dérivable, et strictement monotone ; c'est donc une bijection de R^{*+} dans $]-1, 1[$.

Soit $y = f(x)$, $-1 < y < 1$, et $x = f^{-1}(y)$.

On sait que $(f^{-1})'(y) = 1 / f'(y)$, ce qui conduit à :

$(f^{-1})'(y) = 1/d(1 - y^2)$

5b) En déduire f^{-1}.

Connaissant $(f^{-1})'$, on a f^{-1} en cherchant une primitive H :

$1/(1 - y^2) = 1/2(1 - y) + 1/2(1 + y)$

Soit $H(y) = [\mathrm{Ln}(1+y)/(1-y)]/2 + K$

Or on sait que $f(0) = 0$ et donc $f^{-1}(0) = 0$.
La constante K est telle que $H(y) = 0$, soit $K = 0$.

$f^{-1}(y) = [\mathrm{Ln}(1+y)/(1-y)]/2$

5c) En déduire alors l'expression de f.

On déduit de ce qui précède : $x = f^{-1}(y) = [\mathrm{Ln}(1+y)/(1-y)]/2$

$[\mathrm{Ln}(1+y)/(1-y)] = 2x$

$(1+y)/(1-y) = e^{2x}$

$\Rightarrow y = f(x) = (e^{2x} - 1)/(e^{2x} + 1)$