ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1$^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est composée d'un exercice et deux problèmes, indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.

Exercice :

On considère la suite u(n) définie sur l'ensemble des nombres entiers naturels par la relation :

$u(n+1) = u(n)\, e^{-u(n)}$
avec comme valeur initiale u(0) = 1.

Pour tout n entier, la suite v(n) est définie par la relation :

$$v(n) = \sum_{p=0}^{n} u(p)$$

1) Etudier le signe et le sens de variation de u(n).

2) Trouver la limite de u(n) quand $n \to +\infty$.

3) Montrer que u(n+1) = f(v(n)), où f est une fonction que l'on explicitera.
En déduire la limite de v(n) quand $n \to +\infty$.

Problème 1 :

On donne : $\ln 3 = 1,099$.

Partie I :

Soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$\varphi(x) = \ln x / x$

Etudier les variations de φ et donner très précisément son tableau de variation.
Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.
Tracer le graphe de φ.

Partie II :

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

1) Calculer a^b et b^a pour $a = 2$ et $b = 3$, pour $a = 4$ et $b = 2$, et pour $a = \ln 3$ et $b = 3$.

2) Montrer que comparer a^b et b^a revient à rechercher le signe de $ab(\varphi(a) - \varphi(b))$.

3) En déduire la comparaison de a^b et b^a dans les cas suivants :

3a) $0 < a < b \leq e$

3b) $e \leq a < b$

4) Sans faire le moindre calcul, comparer π^e et e^π.

5) Montrer que pour tout $a > e$, il existe un réel b appartenant à l'intervalle $]1, e[$ tel que $\varphi(b) = \varphi(a)$. En déduire que $a^b = b^a$.

Partie III :

On prend maintenant $a = 3$, et on cherche à résoudre l'équation $3^x = x^3$.

1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$g(x) = 3\ln x - x\ln 3$

Etudier les variations de g.

2) Etablir l'existence de deux réels x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$, tels que $g(x_1) = g(x_2) = 0$.
Donner la valeur (évidente) de x_2.
En déduire une valeur approchée de la solution de l'équation $3^x = x^3$.

Problème 2 :

N est l'ensemble des entiers naturels, N* = N – {0} ; Z est l'ensemble des entiers relatifs ; R est l'ensemble des nombres réels.

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle.
On suppose que, pour tout (x, y) $\in R^2$, f vérifie la relation (E) :

(E) $f(x+y) = [f(x) + f(y)] / [1 + f(x)f(y)]$

1) Montrer que s'il existe un nombre réel a tel que f(a) = 1 ou f(a) = – 1, la fonction f est constante sur R.

Dans toute la suite, on supposera f non constante.

2) On écrit x = (x/2) + (x/2).

2a) Montrer que $-1 < f(x) < 1$, $\forall x \in R$.

2b) Montrer que f(0) = 0.

2c) Montrer que f est impaire.

3) On pose $g(x) = [1 + f(x)]/[1 – f(x)]$.

3a) Démontrer par récurrence que, pour tout réel x et pour tout entier n strictement positif :

$g(nx) = g^n(x)$.

3b) On note $\lambda = g(1)$. Pour tout entier n naturel, donner la valeur de f(n) en fonction de λ.

3c) En déduire f(n) pour tout n appartenant à Z.

4) On suppose maintenant, et pour toute la suite de l'énoncé, que f, en plus de vérifier la relation (E), est dérivable au point 0. La dérivée de f en 0 est le nombre d défini par :

$d = \lim_{h\to 0} f(h)/h$

4a) Montrer que f est dérivable en tout point réel x et que $f'(x) = d(1 – f^2(x))$.

4b) Le nombre d peut-il être nul ?

4c) Montrer que f est monotone sur R.

5) On note f^{-1} la fonction réciproque de f. On admet que f^{-1} est dérivable sur] – 1, 1 [.

5a) Donner l'expression de la dérivée de f^{-1} en tout point de] – 1, 1 [.

5b) En déduire f^{-1}.

5c) En déduire alors l'expression de f.