AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Préambule :

Dans tout le problème, on admettra les résultats suivants :

a) $\forall a \in R$, $\forall$ x > 0, l'intégrale $f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$ existe et est convergente

b) $\forall a > -1$, l'intégrale $g(a) = f_a(0)$ existe

c) $g(0) = f_0(0) = (\pi/2)^{1/2}$

Partie A : a = 0, étude de la fonction f_0

On considère la fonction f_0 définie sur R^+ par :

$$f_0(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$$

1) En découpant l'intégrale sur [x, + ∞ [en une intégrale sur [x, 1 [et une intégrale sur [1, + ∞ [, montrer que f_0 est, en fait, définie sur R.

$$f_0(x) = \int_x^1 e^{-t^2/2} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$$

La deuxième intégrale de l'expression précédente existe d'après le préambule (x = 1) et est une constante ; quant à la première intégrale, elle existe pour x réel quelconque car la fonction $e^{-t^2/2}$ est continue sur R.

2) Interpréter précisément la fonction $f_0 / (2\pi)^{1/2}$ en termes de probabilités.

$f_0(x) / (2\pi)^{1/2}$ n'est autre que le complément à 1 de la fonction de répartition $\Phi(x)$ de la loi normale centrée réduite N(0, 1).
$f_0(x) / (2\pi)^{1/2} = 1 - \Phi(x)$.

3) Donner les valeurs des limites de f_0 quand x tend vers + ∞ et – ∞.

On en déduit, puisque $\Phi(x)$ tend vers 1 quand x tend vers + ∞ et vers 0 quand x tend vers – ∞ :

$$\lim_{n \to +\infty} f_0(x) = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} f_0(x) = (2\pi)^{1/2}$$

Partie B : a > – 1, étude de l'intégrale g(a)

En fonction des notations vues dans le préambule, l'intégrale g(a) est définie par :

$$g(a) = f_a(0) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}\, dt$$

1) Calculer g(1) et g(2).

$g(1) = f_1(0) = \int_{R+} t.e^{-t^2/2}\, dt = \int_{R+} e^{-u}\, du$ en faisant le changement de variable $u = t^2/2$.

D'où g(1) = 1.

$g(2) = f_2(0) = \int_{R+} t^2.e^{-t^2/2}\, dt = \int_{R+} t.te^{-t^2/2}\, dt$

En intégrant par parties avec u = t et $v' = te^{-t^2/2}$, donc $v = -e^{-t^2/2}$, on obtient:

$g(2) = [- te^{-t^2/2}]_{R+} + \int_{R+} e^{-t^2/2}\, dt = 0 + f_0(0) = (\pi/2)^{1/2}$

2) A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation:

$$g(a + 2) = (a + 1)g(a)$$

$g(a + 2) = \int_{R+} t^{a+2} e^{-t^2/2}\, dt = \int_{R+} t^{a+1}. t . e^{-t^2/2}\, dt$

Par parties avec $u = t^{a+1}$ et $v' = te^{-t^2/2}$, donc $v = -e^{-t^2/2}$, on obtient:

$g(a+2) = [- t^{a+1} e^{-t^2/2}]_{R+} + \int_{r+} (a+1)\, t^a e^{-t^2/2}\, dt = 0 + (a+1)\, g(a)$

3) Pour tout nombre entier n, écrire g(a + 2n) en fonction de g(a + 2(n – 1)).
En déduire l'expression de g(a + 2n) en fonction de g(a).

Il est évident que a + 2n = a + 2n – 2 + 2 = a + 2(n – 1) + 2
Donc, en appliquant la relation de la question 2, on a :

g(a + 2(n-1) + 2) = (a + 2(n-1) + 1)g(a + 2(n – 1)) = (a + 2n -1).g(a + 2(n – 1))

On en déduit, pour tout entier n > 0 :

$$g(a + 2n) = \prod_{k=1}^{n} (a + 2k - 1)\, g(a)$$

4) Soit m un nombre entier. On veut donner l'expression de g(m) en fonction de m.

4a) Démontrer que $1\times3\times5\times \ldots\times(2n-1) = (2n)! / 2^n.n!$

Partons de $1\times3\times5\times \ldots\times(2n-1)$; multiplions et divisons pour ne rien changer cette quantité par le produit des n premiers nombres pairs $2\times4\times6\times\ldots\times n$, qui est aussi égal à $2^n.n!$.
On obtient au numérateur la quantité (2n)!, d'où le résultat recherché.

4b) Donner les expressions de g(m) en fonction de m pour m pair, m = 2p, puis pour m impair, m = 2p + 1.

Soit m = 2p.
On fait a = 0 dans l'expression trouvée à la question 3, et on a :

$$g(2p) = \prod_{k=1}^{p}(2k-1)\, g(0) = \prod_{k=1}^{p}(2k-1)\, (\pi/2)^{1/2}$$

D'où le résultat :

$$g(2p) = (\pi)^{1/2}\, (2p)! / 2^{p+1/2}.p!$$

Soit m = 2p +1.
On fait a = 1 dans la relation de la question 3, ce qui conduit à :

$$g(1 + 2p) = \prod_{k=1}^{p}(2k)\, g(1) \text{ avec } g(1) = 1.$$

Il s'en suit : $g(1 + 2p) = (2p)! = 2^p.p!$

<u>Partie C</u> : a > – 1, étude de la fonction f_a

On considère la fonction f_a, a > – 1, définie sur R^+ par :

$$f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt$$

1) Montrer que la fonction f_a est dérivable sur]0, + ∞ [.
En déduire $(f_a)'$ et $(f_a)''$, respectivement dérivée d'ordre 1 et 2 de f_a.

$f_a(x) = \int_{[x,+\infty[} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt = \int_{[x,1[} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt + \int_{[1,+\infty[} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt$
$= \int_{[1,+\infty[} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt - \int_{[1,x[} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt$

La première intégrale est une constante, la deuxième est dérivable pour x >0, de dérivée $x^a\, e^{-x^2/2}$.

f_a est donc dérivable pour x > 0, de dérivée $f_a'(x) = -x^a\, e^{-x^2/2}$.

On trouve ensuite : $f_a''(x) = x^{a-1}\, e^{-x^2/2}\, (x^2 - a)$

2) Quel est le sens de variation de f_a sur]0, + ∞ [?

La dérivée $f_a'(x) = -x^a\, e^{-x^2/2}$ est strictement négative pour x > 0.

On en déduit que f_a est strictement décroissante sur R+.

3) Etudier la limite de f_a quand x tend vers + ∞.
(on pourra couper l'intégrale sur [x, + ∞ [en une intégrale sur [x, 1 [et une intégrale sur [1, + ∞ [)

D'après l'écriture $f_a(x) = \int_{[1,+\infty[} t^a e^{-t^2/2}\,dt - \int_{[1,x[} t^a e^{-t^2/2}\,dt$, et en vertu du préambule, on a $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = 0$.

4) *Dans toute cette question, on se restreint à a > 0.*

4a) Montrer que f_a est continue sur [0, + ∞ [.

$\lim_{x\to 0} f_a(x) = \int_{R+} t^a e^{-t^2/2}\,dt$ (cf préambule) $= f_a(0)$, donc la fonction f_a est continue en 0.

4b) En déduire que $\lim_{x\to 0} f_a'(x) = f_a'(0) = 0$.

D'après le théorème des accroissements finis, $\lim_{x\to 0} f'_a(x) = f'_a(0) = 0$.

4c) Dresser le tableau de variations de f_a et donner la forme de sa courbe.

Puisque a est positif, f''_a s'annule en $a^{1/2}$, est négative avant, positive après.

$$\lim_{x\to\infty} f'_a(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} f'_a(x) = 0$$

On en déduit que f'_a décroit de 0 à min = $f_a(a^{1/2})$ quand x varie de 0 à $a^{1/2}$, puis croît de ce minimum à 0 quand x varie de $a^{1/2}$ à + ∞.
f'_a étant toujours négative, f_a décroit de $f_a(0)$ à 0, avec point d'inflexion en $a^{1/2}$ (concave avant, convexe après).

5) *Dans toute cette question, on se restreint à – 1 < a < 0.*

5a) Montrer que f_a est continue sur [0, + ∞ [.

Idem précédemment, en vertu du préambule.

5b) Calculer $\lim_{x\to 0} f_a'(x)$. La fonction f_a est-elle dérivable en 0 ?

$\lim_{x\to 0} f_a'(x) = -\infty$, donc f_a n'est pas dérivable en 0

5c) Dresser le tableau de variations de f_a et donner la forme de sa courbe.

Puisque a est entre – 1 et 0, f''_a est toujours positive pour x > 0, donc f_a est convexe, strictement décroissante de $f_a(0)$ à 0.

6) Pour toute la suite du problème, on revient au cas général a > – 1.
A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$f_a(x) = x^{a-1} e^{-x^2/2} + (a-1)f_{a-2}(x)$$

Pas de difficulté dans cette intégration, avec $u = t^{a-1}$ et $v' = te^{-t^2/2}$, donc $v = -e^{-t^2/2}$.

7) A partir de la relation établie à la question 6, étudier le signe de $f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2}$.

On a donc : $f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2} = (a-1)f_{a-2}(x)$

Le signe de cette différence est celui de a – 1, soit :

$f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2} \geq 0$ si $a > 1$

$f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2} \leq 0$ si $a < 1$

$f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2} = 0$ si $a = 1$ et dans ce cas $f_a(x) = f_1(x) = e^{-x^2/2}$

8) Démontrer que, pour tout $a > -1$, on a la majoration suivante :

$$|f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2}| \leq |a-1| \,.\, f_a(x) / x^2$$

$|f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2}| = |a-1| \int_{[x,+\infty[} t^{a-2}\, e^{-t^2/2}\, dt$

Or $t^{a-2} = t^a / t^2$.

Comme $t \in [x, +\infty[$, et $x > 0$, $t \geq x$ et donc $1/t \leq 1/x$, d'où $t^{a-2} \leq t^a / x^2$.

$\int_{[x,+\infty[} t^{a-2}\, e^{-t^2/2}\, dt \leq [\int_{[x,+\infty[} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt\,] / x^2 = f_a(x) / x^2$

En déduire que, quand x tend vers $+\infty$, on a l'équivalent :

$$f_a(x) \sim x^{a-1}\, e^{-x^2/2}$$

Quand $x \to +\infty$, $|a-1| \,.\, f_a(x) / x^2$ tend vers 0, d'où le résultat.

9) Dans le cas où $-1 < a \leq 1$, montrer que la majoration trouvée à la question 8 peut être améliorée en :

$$|f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2}| \leq 2\, x^{a-3}\, e^{-x^2/2}$$

Reprenons le majorant trouvé à la question 8 : $|a-1| \,.\, f_a(x) / x^2$
Pour $-1 < a \leq 1$, $|a-1| \leq 2$.
D'autre part, on a montré à la question 6 que $f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2} \leq 0$ si $a < 1$.
Il s'en suit :
$|a-1| \,.\, f_a(x) / x^2 \leq 2.\, x^{a-1}\, e^{-x^2/2}/x^2 = 2\, x^{a-3}\, e^{-x^2/2}$

Partie D : polynômes de Hermite

On considère la fonction h définie sur R par $h(x) = e^{-x^2/2}$.

1) Etudier précisément les variations et donner la forme du graphe de h.

h est définie sur R, positive, paire, telle que lim h = 0 quand x tend vers l'infini (asymptote horizontale : y = 0), h(0) = 1.
$h'(x) = -x\, h(x) \Rightarrow$ h est décroissante de 1 à 0 sur R^+
$h'(0) = 0$
$h''(x) = (x^2 - 1)h(x)$ s'annule en x = 1 et -1 (points d'inflexion). La fonction est concave sur -1 et +1 et convexe sinon.

2) Donner l'expression de la dérivée h'(x) en fonction de h(x).

$h'(x) = - x\,h(x)$

3) Montrer que $h''(x) = P_2(x).h(x)$ et $h'''(x) = P_3(x).h(x)$, où P_2 et P_3 sont des polynômes respectivement de degré 2 et 3.

$h''(x) = - h(x) – xh'(x) = (x^2 - 1)h(x)$

$h'''(x) = (x^2 - 1)h'(x) + 2x.h(x) = (-x^3 + 3x).h(x)$

$P_2(x) = x^2 - 1$

$P_3(x) = -x^3 + 3x$

4) Montrer rigoureusement que la dérivée d'ordre n de h, $h^{(n)}(x)$ peut être écrite sous la forme $P_n(x).h(x)$, où P_n est un polynôme de degré n ne comportant que des puissances paires de x si n est pair, ou uniquement des puissances impaires de x si n est impair.
Le polynôme $H_n(x) = (-1)^n P_n(x)$ est appelé polynôme de Hermite. Ecrire H_1, H_2, H_3.

Raisonnons par récurrence :

$P_1(x) = - x$

Soit n pair, n = 2p :

$$P_{2p}(x) = \sum_{k=0}^{p} a_{2k}x^{2k}$$

$h^{(2p)}(x) = P_{2p}(x).h(x)$

$h^{(2p+1)}(x) = P_{2p}(x).h'(x) + P'_{2p}(x).h(x) = -x.\ P_{2p}(x).h(x) + P'_{2p}(x).h(x)$
$h^{(2p+1)}(x) = P_{2p+1}(x).h(x)= [-x.\ P_{2p}(x) + P'_{2p}(x)].h(x)$

$$P_{2p+1}(x) = [-x.\ P_{2p}(x) + P'_{2p}(x)] = -a_{2p}x^{2p+1} + \sum_{k=1}^{p} (-a_{2k-2} + 2k.\ a_{2k})x^{2k-1}$$

$H_1 = x$

$H_2 = x^2 - 1$

$H_3 = x^3 - 3x$

5) Etablir une relation entre P_{n+1}, P_n et P'_n.
On donne $P_4(x) = x^4 – 6x^2 + 3$. En déduire l'expression de P_5 et celle de H_5.

Comme à la question précédente, on a la relation $P_{n+1}(x) = -x.\ P_n(x) + P'_n(x)$.

D'où : $P_5(x) = -x.\ P_4(x) + P'_4(x) = – x^5 + 6x^3 – 3x + 4x^3 – 12x = – x^5 + 10x^3 – 15x$

Et $H_5(x) = x^5 – 10x^3 + 15x$