

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est composée d'un seul problème comportant quatre parties autonomes, qui peuvent être traitées dans un ordre quelconque. R désigne l'ensemble des nombres réels et R^+ l'ensemble des nombres réels positifs.

Préambule :

Dans tout le problème, on admettra les résultats suivants :

a) $\forall a \in R, \forall x > 0$, l'intégrale $f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$ existe et est convergente

b) $\forall a > -1$, l'intégrale $g(a) = f_a(0)$ existe

c) $g(0) = f_0(0) = (\pi/2)^{1/2}$

Partie A : a = 0, étude de la fonction f_0

On considère la fonction f_0 définie sur R^+ par :

$$f_0(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$$

1) En découpant l'intégrale sur $[x, +\infty[$ en une intégrale sur $[x, 1[$ et une intégrale sur $[1, +\infty[$, montrer que f_0 est, en fait, définie sur R .

2) Interpréter précisément la fonction $f_0 / (2\pi)^{1/2}$ en termes de probabilités.

3) Donner les valeurs des limites de f_0 quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

Partie B : $a > -1$, étude de l'intégrale $g(a)$

En fonction des notations vues dans le préambule, l'intégrale $g(a)$ est définie par :

$$g(a) = f_a(0) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$$

1) Calculer $g(1)$ et $g(2)$.

2) A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation :

$$g(a+2) = (a+1)g(a)$$

3) Pour tout nombre entier n , écrire $g(a+2n)$ en fonction de $g(a+2(n-1))$.
En déduire l'expression de $g(a+2n)$ en fonction de $g(a)$.

4) Soit m un nombre entier. On veut donner l'expression de $g(m)$ en fonction de m .

4a) Démontrer que $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) = (2n)! / 2^n \cdot n!$

4b) Donner les expressions de $g(m)$ en fonction de m pour m pair, $m = 2p$,
puis pour m impair, $m = 2p+1$.

Partie C : $a > -1$, étude de la fonction f_a

On considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $a > -1$ par :

$$f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$$

1) Montrer que la fonction f_a est dérivable sur $]0, +\infty[$.
En déduire $(f_a)'$ et $(f_a)''$, respectivement dérivée d'ordre 1 et 2 de f_a .

2) Quel est le sens de variation de f_a sur $]0, +\infty[$?

3) Etudier la limite de f_a quand x tend vers $+\infty$.
(on pourra couper l'intégrale sur $[x, +\infty[$ en une intégrale sur $[x, 1[$ et une intégrale sur $[1, +\infty[$)

4) *Dans toute cette question, on se restreint à $a > 0$.*

4a) Montrer que f_a est continue sur $[0, +\infty[$.

4b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} f_a'(x) = f_a'(0) = 0$.

4c) Dresser le tableau de variations de f_a et donner la forme de sa courbe.