AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

Soit θ un réel appartenant à l'intervalle J = $]-\pi/2, +\pi/2[$.
On considère l'équation (E) de la variable complexe z :

(E) $z^2\cos^2\theta - 4z\cos\theta + 5 - \cos^2\theta = 0$

1 – Résoudre (E) dans l'ensemble des complexes. On précisera pour quelle(s) valeur(s) de θ l'équation (E) admet une racine double et la valeur de cette racine.

2 – Le plan complexe étant rapporté à un repère orthogonal, on note par M_1 et M_2 les points du plan complexe dont les affixes respectives sont z_1 et z_2, solutions de (E).

Donner l'équation cartésienne de la courbe du plan, lieu géométrique de M_1 et M_2 lorsque θ varie sur l'intervalle J.

Correction :

1 – Le discriminant de (E) est $\Delta' = 4\cos^2\theta - \cos^2\theta\,(5 - \cos^2\theta) = -\cos^2\theta + \cos^4\theta$
$\Delta' = \cos^2\theta\,(\cos^2\theta - 1) = -\cos^2\theta\,\sin^2\theta = (i\,\sin\theta\,\cos\theta)^2$

Racine double si $\Delta' = 0$, c'est-à-dire $\theta = 0$ puisque θ appartient à l'intervalle ouvert J = $]-\pi/2, +\pi/2[$.
Pour $\theta = 0$, (E) devient $z^2 - 4z + 4 = 0 = (z - 2)^2$
La racine double est $z^* = 2$.

Cas général :
Pour θ non nul, les solutions sont :
$z_1 = (2\cos\theta - i\sin\theta\cos\theta)/\cos^2\theta$
et $z_2 = (2\cos\theta + i\sin\theta\cos\theta)/\cos^2\theta$

Après transformation, on obtient :

$z_1 = 2/\cos\theta - i\,\mathrm{tg}\theta$
$z_2 = 2/\cos\theta + i\,\mathrm{tg}\theta$

2 – Les coordonnées de M_1 et M_2 sont :

Pour M_1 : $x_1 = 2/\cos\theta$ et $y_1 = -\,tg\theta$
Pour M_2 : $x_2 = 2/\cos\theta$ et $y_2 = tg\theta$
On sait que $1 + tg^2\theta = 1/\cos^2\theta$.

On en déduit que $1 + y^2 = x^2/4$.
Les points M_1 et M_2 appartiennent à la courbe d'équation $x^2/4 - y^2 - 1 = 0$, qui est une hyperbole de sommets A(2, 0) et A'(-2, 0), et d'asymptotes $y = x/2$ et $y = -x/2$.

Problème :

Dans tout le problème, on se place dans l'espace des polynômes, à coefficients réels, de la variable réelle.

On appelle **polynôme symétrique** un polynôme P dont les coefficients peuvent se lire indifféremment dans un sens comme dans l'autre, et sont donc égaux par paires.
L'objectif du problème est d'avancer dans la recherche des solutions de l'équation $P(x) = 0$.

Plus précisément, pour un polynôme symétrique P_{2n+1} de degré impair 2n+1 :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k$$

les coefficients vérifient la relation $a_k = a_{2n-k+1}$ pour k = 0 à n.

De même, pour un polynôme symétrique P_{2n} de degré pair 2n :

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$$

Les coefficients vérifient la relation $a_k = a_{2n-k}$ pour k = 0 à n-1, le coefficient médian a_n n'étant pas apparié.

__Partie 1__

On pose $y = x + (1/x)$, pour $x \neq 0$, et $u(k) = x^k + (1/x)^k$, pour k entier, $k \geq 0$ (et donc $u(1) = y$).

1 – Calculer u(0) et exprimer u(2) en fonction de y.

__Correction__ :

$u(0) = 2$, $u(1) = y$, $u(2) = y^2 - 2$.

2 – Montrer que u(k+1) peut être exprimé en fonction de u(k), u(k-1) et y au moyen d'une relation R que l'on explicitera précisément.

Correction :

$(x^k + x^{-k})(x + x^{-1}) = (x^{k+1} + x^{-k-1}) + (x^{k-1} + x^{-k+1})$

D'où la relation (R) :

$u(k+1) = y.u(k) – u(k-1)$

3 – En utilisant la relation R établie à la question 2, discuter les conditions d'existence de la solution de R et donner la forme générale de u(k) en fonction de y et de k.

Correction :

L'équation caractéristique associée à la relation (R) est : $\lambda^2 - \lambda y + 1 = 0$.

$\Delta = (y^2 - 4)$

Si $\Delta>0$, il existe 2 racines $\lambda_1 = (y + \Delta^{1/2})/2$ et $\lambda_2 = (y – \Delta^{1/2})/2$.

La forme générale de u(k) est :

$u(k) = a[(y + \Delta^{1/2})/2]^k + b[(y – \Delta^{1/2})/2]^k$

Avec les conditions initiales u(0) = 2 et u(1) = y, on en déduit :

$a + b = 2$

$u(1) = y = (a + b)y/2 + (a – b)\Delta^{1/2}/2$

$\Rightarrow$ a + b = 2 et a – b = 0

D'où a = b = 1

$$u(k) = [(y + \Delta^{1/2})/2]^k + [(y – \Delta^{1/2})/2]^k = 2^{-k}[\sum_{i=0}^{k} C_k^{\,i}\, y^i\, (y^2 - 4)^{(k-i)/2}\,(1 + (-1)^{k-i})$$

4 – Montrer que u(k) est un polynôme de degré k en y.

Correction :

- soit k pair, k = 2p

Alors, pour i pair, k-i pair $\Rightarrow 1 + (-1)^{k-i} = 2$

Et, pour i impair, k-i impair $\Rightarrow 1 + (-1)^{k-i} = 0$.

Ainsi, pour k = 2p, $2^k u(k) = \sum_{i=0}^{2p} 2\, C^i_{2p}\, y^i\, (y^2 - 4)^{(2p-i)/2}$

- soit k impair, k = 2p +1

Alors, pour i pair, k-i impair $\Rightarrow 1 + (-1)^{k-i} = 0$

Et, pour i impair, k-i pair $\Rightarrow 1 + (-1)^{k-i} = 2$.

Ainsi, pour k = 2p + 1, $2^k u(k) = \sum_{i=0}^{2p+1} 2\, C^i_{\ 2p+1}\, y^i\, (y^2 - 4)^{(2p+1-i)/2}$

Il est évident que u(k) est un polynôme, et en regardant les termes du plus haut degré, un polynôme de degré k.

5 – Calculer u(3), u(4), u(5) et u(6) en fonction de y.

Correction :

En utilisant la relation (R) de la question 2 :

$u(3) = y^3 – 3y$

$u(4) = y^4 – 4y^2 + 2$

$u(5) = y^5 – 5y^3 + 5y$

$u(6) = y^6 – 6y^4 + 9y^2 – 2$

Partie 2

1 – Donner un exemple de polynôme symétrique de degré 1.

Correction : $P_1(x) = x + 1$ est un polynôme symétrique de degré 1.

2 – On considère le polynôme P_2 de degré 2 tel que : $x \longmapsto ax^2 + bx + a$, $a \neq 0$.
Résoudre l'équation $P_2(x) = 0$.
Dans le cas où P_2 admet deux racines distinctes, les comparer.

Correction :

$P_2(x) = ax^2 + bx + a$
$\Delta = (b^2 - 4a^2)$.
Condition d'existence de 2 racines distinctes : $b^2 - 4a^2 > 0$, ou $|b| > 2|a|$
Racine double : $|b| = 2|a|$
Si $\Delta > 0$, il existe deux racines distinctes $x_1 = (-b +\Delta^{1/2})/2a$ et $x_2 = (-b -\Delta^{1/2})/2a$.

On constate surtout que les deux racines sont inverses, le produit x_1x_2 étant égal à 1.

Si $\Delta = 0$, $b = +/-2a$, et l'équation devient $ax^2 +/- 2ax + a = a(x+1)^2$ ou $a(x-1)^2$, c'est-à-dire que +1 ou -1 est racine double selon que $b = 2a$ ou $b = -2a$.

Partie 3

Considérons maintenant le polynôme P_3 du troisième degré tel que :

$x \longmapsto ax^3 + bx^2 +bx + a$, $a \neq 0$.

1 – Montrer que 0 n'est pas racine de P_3 et que si α est racine de P_3, alors $1/\alpha$ l'est aussi.

Correction :

$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a$

$P_3(0) = a \neq 0 \Rightarrow 0$ n'est pas racine de P_3.

$P_3(\alpha) = a\,\alpha^3 + b\,\alpha^2 + b\,\alpha + a = 0 = \alpha^3\,[a + b(1/\alpha) + b(1/\alpha)^2 + a(1/\alpha)^3]$
$1/\alpha$ est donc aussi racine de P_3 car $\alpha \neq 0$.

2 – Trouver une racine évidente x_0 de P_3 et en déduire une factorisation de P_3.

(-1) est racine évidente.
En factorisant : $P_3(x) = (x + 1)(ax^2 + (b-a)x + a)$.
On remarque que le polynôme $(ax^2 + (b-a)x + a)$ est encore un polynôme symétrique.

3 – Discuter le nombre de solutions de l'équation $P_3(x) = 0$.

Correction :

Soit à résoudre $ax^2 + (b-a)x + a = 0$.
$\Delta = (b-a)^2 - 4a^2 = (b - 3a)(b + a) \geq 0$ pour b n'appartenant pas à l'intervalle $]|a|, |3a|[$

On a alors 3 racines :
$x_1 = -1$

$x_2 = (a - b + \Delta^{1/2})/2a$

$x_3 = (a - b - \Delta^{1/2})/2a = 1/x_2$

4 – Soit $P_3(x) = 7x^3 - 43x^2 - 43x + 7$. Résoudre l'équation $P_3(x) = 0$

$7x^3 - 43x^2 - 43x + 7 = (x + 1)(7x^2 - 50x + 7)$

Racines : $x_1 = -1$, $x_2 = 7$, $x_3 = 1/7$

Partie 4

Soit le polynôme P_4 du quatrième degré tel que : $x \longmapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$, où $a \neq 0$.

1 – Montrer que 0 n'est pas racine de P_4 et que si α est racine de P_4, alors 1/α l'est aussi.
Correction : cf partie 3

2 – Soit $y = x + (1/x)$, pour $x \neq 0$, introduite dans la partie 1.

Montrer que $P_4(x) = x^2 g(x)$, où g est une fonction de la variable réelle x que l'on explicitera.

Exprimer g en fonction de y et y^2, et des coefficients a, b, c.

Correction :

$P_4(x) = x^2 g(x)$ avec $g(x) = a(x^2 + 1/x^2) + b(x + 1/x) + c$

La fonction g peut être exprimée en fonction de y comme étant $ay^2 + by + c - 2a$ puisque $x^2 + 1/x^2 = y^2 - 2$ (d'après la partie 1).

3 – A quelle condition sur a, b et c l'équation $P_4(x) = 0$ admet-elle des solutions ? Montrer que résoudre l'équation $P_4(x) = 0$ revient à résoudre deux équations du second degré.

Correction :

Les solutions de $ay^2 + by + c - 2a = 0$ existent si $b^2 - 4a(c - 2a) = b^2 + 8a^2 - 4ac \geq 0$.

On note y_1 et y_2 les racines de $ay^2 + by + c - 2a$, $y_1 = [-b + [(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2}]/2a$ et

$y_2 = [-b - [(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2}]/2a$.

Comme 0 n'est pas racine de P_4 , il reste à résoudre les deux équations :

$x + 1/x = y_1$ et $x + 1/x = y_2$, ou encore $x^2 - xy_1 + 1 = 0$ et $x^2 - xy_2 + 1 = 0$

Soit $x^2 - xy_1 + 1 = 0$; $\Delta = (y_1^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow [(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2} - b]^2 \geq 16a^2$.

De même, pour $x^2 - xy_2 + 1 = 0$, la condition d'existence de 2 racines en x sera :

$(y_2^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow [(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2} + b]^2 \geq 16a^2$.

En résumé, l'équation $P_4(x) = 0$ aura 4 racines distinctes si :

$b^2 + 8a^2 - 4ac > 0$

$[(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2} - b]^2 > 16a^2$.

$[(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2} + b]^2 > 16a^2$.

Soit $b^2 + 8a^{2²} - 4ac > 0$ et $\mathrm{Min}\{[(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2} - b]^2, [(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2} + b]^2\} > 16a^2$.

4 – Résoudre l'équation : $12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12 = 0$.

Correction :

$P_4(x) = x^2g(x)$ avec $g(x) = 12(x^2 + 1/x^2) + 11(x + 1/x) - 146$

En notant par abus de langage $g(y) = 12(y^2 - 2) + 11y - 146 = 12y^2 + 11y - 170$,
on a : $y_1 = -17/4$ et $y_2 = 10/3$.

Cela conduit aux deux équations :

$x + 1/x + 17/4 = 0$ ou $4x^2 + 17x + 4 = 0$.

$x + 1/x - 10/3 = 0$ ou $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

La première mène à $x_1 = -8$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$; la seconde à $x_3 = 3$ et $x_4 = 1/3$.

Partie 5

On se place dans le cas général.

1 – Soit P_{2n+1} un polynôme symétrique. Trouver une racine évidente de P_{2n+1}.

Correction :

(-1) est racine évidente, compte tenu de la symétrie des coefficients.

2 – Montrer que $P_{2n+1}(x) = H(x)Q_{2n}(x)$ où H est un polynôme de degré 1 que l'on précisera et Q_{2n} un polynôme de degré 2n. On pose :

$$Q_{2n}(x) = \sum_{i=0}^{2n} b_i x^i$$

Exprimer les coefficients a_k, k = 0 à 2n+1, du polynôme P_{2n+1} en fonction des coefficients b_i, i = 0 à 2n, du polynôme Q_{2n}.
Montrer que le polynôme Q_{2n} est un polynôme symétrique.

Correction :

-1 étant racine, on peut factoriser (x + 1), soit : $P_{2n+1}(x) = (x + 1)Q_{2n}(x)$,
d'où H(x) = x + 1.

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_i x^i$$

$$Q_{2n}(x) = \sum_{i=0}^{2n} b_i x^i$$

$$\sum_{i=0}^{2n+1} a_i x^i = (x+1) \sum_{i=0}^{2n} b_i x^i$$

En regardant les termes extrêmes, on a les égalités $a_{2n+1} = b_{2n}$, et $a_0 = b_0$.

En comparant les coefficients de x^k dans les deux écritures, on a :
$a_k = b_{k-1} + b_k$ pour k = 1 à 2n.

Soit à montrer $b_k = b_{2n-k}$ pour k = 0 à n – 1.

H1 : k = 0 ; $a_0 = a_{2n+1} \Rightarrow b_0 = b_{2n}$. La relation est vraie pour k = 0.

H2 : supposons l'hypothèse vérifiée au rang k-1 : $b_{k-1} = b_{2n-k+1}$.

Montrons que:

$b_k = b_{2n-k}$

$b_k = a_k - b_{k-1} = a_{2n+1-k} - b_{2n-k+1}$

$a_k = b_{k-1} + b_k = a_{2n+1-k} = b_k + b_{2n-k+1}$

Or $a_{2n+1-k} = b_{2n-k} + b_{2n-k+1} \Rightarrow b_k = b_{2n-k}$

3 – Montrer que $Q_{2n}(x)/x^n$ peut être mis sous la forme $R_n(y)$ où R_n est un polynôme de degré n de la variable y déjà définie dans la partie 1, et utilisée également dans la partie 4.

Correction :

$Q_{2n}(x)$ est un polynôme symétrique, donc $Q_{2n}(x) = x^n [b_n + \sum_{i=0}^{n} (x^i + x^{-i})]$.

Soit $D(x) = b_n + \sum_{i=0}^{n} (x^i + x^{-i})$.

En utilisant la relation (R) (partie 1, question 2), et les résultats de la question 4, partie 1, on montre que D(x) peut être mis sous la forme d'un polynôme de degré n en y $R_n(y)$.