AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

On considère la suite numérique $u(n)$ définie sur N par son origine $u(0) = 1$ et son terme général $u(n+1) = au(n) + bn + c$, a, b et c étant des nombres réels, $a \neq 0$.

A partir de $u(n)$ on définit la suite $v(n)$ par :

$v(n) = \alpha u(n) + \beta n + \gamma$, pour n entier ≥ 0, α, β et γ étant des nombres réels, $\alpha \neq 0$.

1) Quelles conditions doivent vérifier les paramètres a, b, c, α, β et γ pour que la suite $v(n)$ soit une suite géométrique.

2) On donne pour toute la suite de l'exercice : $a = 1/3$, $b = 1$, $c = -1$, $\alpha = 4$, $\beta = -6$, et $\gamma = 15$. Calculer $v(n)$ en fonction de n.

3) En déduire que $u(n)$ peut s'écrire sous la forme $u(n) = g(n) + h(n)$, où $g(n)$ est une suite géométrique et $h(n)$ une suite arithmétique dont on écrira les expressions en fonction de n.

4) Calculer explicitement, en fonction de n, la somme $U = \sum_{k=0}^{n} u(k)$.

Solution :

1) $u(n+1) = [v(n+1) - \beta(n+1) - \gamma]/\alpha = a[v(n) - \beta n - \gamma]/\alpha + bn + c$

Il s'en suit :

$v(n+1) = av(n) + n(-a\beta + \alpha b + \beta) + (\alpha c - a\gamma + \beta + \gamma)$

La suite v sera géométrique, $v(n+1) = av(n)$, sous les conditions suivantes :

$-a\beta + \alpha b + \beta = 0$

$\alpha c - a\gamma + \beta + \gamma = 0$

2) On vérifie que les conditions de la question 1 sont satisfaites par le jeu de coefficients numériques donné.

Comme $a = 1/3$, on a la suite géométrique $v(n) = v(n-1)/3$

$v(0) = 4u(0) + 15 = 19$

D'où la forme générale de $v(n)$: $v(n) = 19/3^n$

3) D'après la définition de $v(n)$, $v(n) = 19/3^n = 4u(n) - 6n + 15$, ou :

$u(n) = 19/4.3^n + (6n - 15)/4$

On pose $g(n) = 19/4.3^n$ et $h(n) = (6n - 15)/4$

4) $U = G + H$ avec $G = \sum_{k=0}^{n} 19/4.3^k$ et $H = \sum_{k=0}^{n} (6k - 15)/4$

$G = 19/4 = \sum_{k=0}^{n} (1/3^k) = 19/4\ [1 - 3^{-(n+1)}]/(1 - 1/3) = 57(1 - 3^{-(n+1)})/8$

$H = 3(n+1)(n - 5)/4$

$U = 57(1 - 3^{-(n+1)})/8 + 3(n+1)(n - 5)/4$

Problème

1) Soit f l'application de R dans R^+ définie par $f(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$.

1a - Etudier précisément les variations de f (dérivées, tableau de variations, concavité, limites, asymptotes, graphe…)

1b - Montrer que, pour tout réel x, on a $f(x) > |x|$

2) On considère l'application g définie sur R par $g(x) = x + (x^2 + 1)^{1/2}$.
Etudier g et tracer son graphe dans le repère orthonormal usuel.

3) On donne maintenant l'application h définie sur R par $h(x) = (x^2 - 1)/2x$.
Etudier h. Donner, en fonction de x, des expressions simples pour $h(g(x))$ et $g(h(x))$.

4) Soit l'application u définie sur R par $u(x) = (x^2 + 1)/2x$.
Etudier précisément les variations de u.

5) n étant un entier naturel, on considère la suite d'applications v_n définie sur R par :

$$v_n(x) = [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^n + (x - (x^2 + 1)^{1/2})^n] / 2$$

5a – Calculer $v_0(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$ et $v_3(x)$.

5b – Pour tout réel x, comparer $v_n(x)$ et $v_n(-x)$.

5c – Pour tout réel x, comparer $v_n(x)$ et $v_{-n}(x)$; en déduire directement les relations existant entre $v_n(-x)$, $v_{-n}(x)$, $v_{-n}(-x)$ et $v_n(x)$.

6) Montrer que v_n est un polynôme.

Préciser le degré de ce polynôme et le coefficient de son terme du plus haut degré.
Calculer le coefficient du terme du plus haut degré pour les polynômes v_4 et v_5.

7) On note par w l'application définie sur R par $w(x) = x^n$, où n est un entier naturel.

Le symbole o désignant la loi de composition des applications, montrer que, selon la parité de n, v_n peut s'écrire sous les formes ($u\ o\ w\ o\ g$) ou ($h\ o\ w\ o\ g$).

8) Déduire de la question précédente les tableaux de variations de v_n, selon la parité de n.

9) Dans cette question, on suppose que n est un entier non nul.

Soit k un nombre réel donné.

Discuter, selon la valeur de k, le nombre de racines réelles de l'équation $v_n = k$.

10) Soit le nombre réel θ tel que $0 < \theta < \pi/2$

10a - Résoudre, dans le corps C des nombres complexes, l'équation (E) :

(E) $\quad z^n + z^{-n} = 2\cos\theta$

10b - z_s étant une racine de l'équation (E), calculer $h(z_s) = t_s$.

10c - En notant encore par v_n le prolongement à C de l'application définie à la question 5, calculer $v_n(t_s)$.

Solution :

1a) f est strictement positive, et symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car $f(-x) = f(x)$. On peut donc restreindre l'étude à R^+

$f'(x) = x/(x^2+1)^{1/2}$
$f''(x) = (x^2+1)^{-3/2}$

lim $f(x) = +\infty$ quand x tend vers + ou - ∞.

$f(x)/x \to 1$ quand $x \to +\infty$
$f(x) - x = (x^2+1)^{1/2} - x \approx 1/2x \to 0$ quand $x \to +\infty$

$y = x$ est asymptote.

Le minimum est atteint pour $x = 0$, et $f(0) = 1$; $f'(0) = 0$.

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

1b) $(x^2 + 1)^{1/2} > (x^2)^{1/2} = |x|$

2) $g(x) = x + (x^2 + 1)^{1/2}$.

D'après la question 1b, $g(x) > 0$.

$g'(x) = g(x)/ (x^2 + 1)^{1/2} > 0$.
$g(0) = 1$, $g'(0) = 1$

$g''(x) = (x^2 + 1)^{-3/2} > 0$.

Asymptotes :

$g(x)/x \to 2$ quand $x \to +\infty$
$g(x) - 2x \to 0$ quand $x \to +\infty$, $y = 2x$ est asymptote

$g(x)/x \to 0$ quand $x \to -\infty$

Limites :

$g(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$
$g(x) \to 0$ quand $x \to -\infty$

g est donc croissante sur R, de 0 à $+\infty$, avec asymptote horizontale pour x au voisinage de $-\infty$ et $y = 2x$ asymptote au voisinage de $+\infty$.

3) $h(x) = (x^2 - 1)/2x$; $x \neq 0$. Fonction impaire.

$h'(x) = (x^2 + 1)/2x^2 > 0$
$h''(x) = - x^{-3}$ qui est < 0 pour $x > 0$ et inversement.

$h(-1) = h(1) = 0$; $h'(-1) = h'(1) = 1$

$h(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ et $h(x) \to -\infty$ quand $x \to -\infty$.

Asymptotes :

$h(x)/x \to 1/2$ quand $x \to +\infty$
$h(x) - x/2 \to 0$ quand $x \to +\infty$, $y = x$/é est asymptote

Idem quand $x \to -\infty$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
h'		$+$			$\Vert$		$+$		
h	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$h(g(x)) = (g^2(x) - 1)/2g(x) = x$

$g(h(x)) = h(x) + (h^2(x) + 1)^{1/2} = (x^2 - 1)\,/2x \;+\; (x^2 + 1)/2\,|x|$

Cas 1 : $x > 0$ alors $g(h(x)) = x$

Cas 2 : $x < 0$ alors $g(h(x)) = -1/x$

4) $u(x) = (x^2 + 1)/2x$; $x \neq 0$. Fonction impaire.

$u'(x) = (x^2 - 1)/2x^2$
$u''(x) = x^{-3}$
$u(-1) = -1$ (maximum)
$u(1) = 1$ (minimum)

Limites :

$u(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$
$u(x) \to -\infty$ quand $x \to -\infty$
$u(x) \to -\infty$ quand $x \to 0-$
$u(x) \to +\infty$ quand $x \to 0+$

Asymptote : $y = x/2$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
h'		$+$		$-$	$\Vert$	$-$		$+$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5a) $v_0(x) = 1$

$v_1(x) = x$

$v_2(x) = 2x^2 + 1$

$v_3(x) = 4x^3 + 3x$.

5b) $v_n(x) = [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^n + (x - (x^2 + 1)^{1/2})^n] / 2$

$v_n(-x) = [(-x + (x^2 + 1)^{1/2})^n + (-x - (x^2 + 1)^{1/2})^n] / 2$

Il s'en suit :

$v_n(-x) = [(-1)^n (x - (x^2 + 1)^{1/2})^n + (-1)^n (x + (x^2 + 1)^{1/2})^n] / 2 = (-1)^n v_n(x)$

5c) $v_{-n}(x) = [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^{-n} + (x - (x^2 + 1)^{1/2})^{-n}] / 2$

En multipliant chaque élément de la somme par son terme conjugué, respectivement

$(x - (x^2 + 1)^{1/2})^{-n}]$ et $(x + (x^2 + 1)^{1/2})^{-n}$, on obtient $v_{-n}(x) = (-1)^n v_n(x)$

D'où : $v_{-n}(x) = v_n(- x)$ et $v_{-n}(- x) = v_n(x)$.

6) En développant par la formule du binôme de Newton, on a :

$$2\, v_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ x^k (1 + x^2)^{(n-k)/2} (1 + (-1)^{n-k})$$

Posons $a(k) = (1 + (-1)^k)$; si n-k est pair, $a(k) = 2$; si n-k est impair, $a(k) = 0$.

D'où les deux cas à distinguer :

Cas 1 : si n est pair ($n = 2p$)

$a(k) = 0$ pour $k = 1, 3, 5, \ldots, 2p-1$

$a(k) = 2$ pour $k = 0, 2, 4, \ldots., 2p$

Le terme du plus haut degré est x^n.

Le coefficient de x^n est $C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$

Cas 2 : si n est impair ($n = 2p+1$)

$a(k) = 0$ pour $k = 0, 2, 4, \ \ldots, 2p$

$a(k) = 2$ pour $k = 1, 3, \ \ldots., 2p+1$

Le terme du plus haut degré est x^n.

Le coefficient de x^n est $C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^n$

Exemples :

$n = 2$, alors $C_2^0 + C_2^2 = 2$

$n = 3$, alors $C_3^1 + C_3^3 = 4$

Pour $n = 4$, le coefficient de x^4 sera 8 , et pour $n = 5$ le coefficient de x^5 sera 16.

7) $w(x) = x^n$, où n est un entier naturel.
$w'(x) = n\,x^{n-1}$, et w est décroissante de $-\infty$ à 0 sur R^- et croît de 0 à $+\infty$ sur R^+

$w(1) = 1$

Calculons maintenant $u(w(g(x)))$.

$w(g(x)) = (x + (x^2 + 1)^{1/2})^n$

$u(w(g(x))) = [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^n + (x + (x^2 + 1)^{1/2})^{-n}] / 2$

$= [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^n + (-1)^n (x - (x^2 + 1)^{1/2})^n] / 2$

Donc, si n est pair, $u(w(g(x))) = [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^n + (x - (x^2 + 1)^{1/2})^n] / 2 = v_n(x)$

Si n est impair, on ne peut rien dire.

Calculons ensuite maintenant $h(w(g(x)))$.

$h(w(g(x))) = [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^n - (x + (x^2 + 1)^{1/2})^{-n}] / 2$
$= [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^n - (-1)^n (x - (x^2 + 1)^{1/2})^n] / 2$

Si n est impair, $h(w(g(x))) = [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^n + (x - (x^2 + 1)^{1/2})^n] / 2 = v_n(x)$

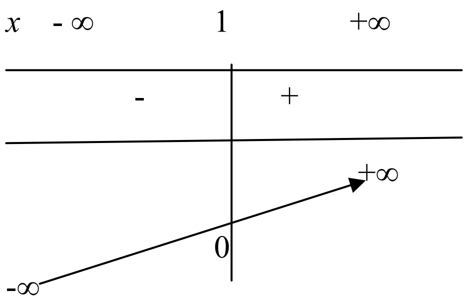
8) On déduit de la question 7 et des questions 2, 3 et 4 (variations des applications g, h et u) que :

- $w(g(x))$ est croissante sur R^+ et positive pour tout x.
- $w(g(x))$ est entre 0 et 1 si $x < 0$ (puisque $g(x) < 1$) et donc $g^n(x) < 1$
- $u(w(g(x)))$ est décroissante de $-\infty$ à 1 pour $w(g(x))$ entre 0 et 1, et croissante sur $(1, +\infty)$.

D'où le tableau pour $u \circ w \circ g$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
		$-$		$+$	
	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

De même, pour $h \circ w \circ g$, $h(w(g(x)))$ est monotone croissante croît de $-\infty$ à $+\infty$.



9) Soit à résoudre $v_n(x) = k$.

Si n est pair, alors $v_n = u \circ w \circ g$ et donc :

- si $k > 1$, 2 racines
- si $k = 1$, une racine
- si $k < 1$, pas de racine

Si n est impair, alors $v_n = h \circ w \circ g$ et donc, pour tout k, il existe une et une seule racine.

10a) L'équation à résoudre est (E) $z^{2n} - 2\, z^n \cos\theta + 1 = 0$

On pose $X = z^n$

(E) devient : $X^2 - 2\, X \cos\theta + 1 = 0$

Deux solutions :

$X(1) = \cos\theta + \mathrm{i} \sin\theta = e^{i\theta}$

$X(2) = \cos\theta - \mathrm{i} \sin\theta = e^{-i\theta}$

A partir de $X(1)$ et $X(2)$, en résolvant en z les équations $X(1) = z^n$ et $X(2) = z^n$, on obtient $2n$ racines.

A partir de $X(1)$: $z(1, s) = \exp[(i\theta + 2is\pi)/n]$, avec s = 0 à n-1

A partir de $X(2)$: $z(2, s) = \exp[(-i\theta + 2is\pi)/n]$, avec s = 0 à n-1

10b) Prenons la racine $z(1, s) = \exp[(i\theta + 2is\pi)/n]$.

$h(z(1, s)) = (\exp[(i\theta + 2is\pi)/n] - \exp[-(i\theta + 2is\pi)/n])/2$.

En développant : $h(z(1, s)) = t_s = \mathrm{i}.\sin(\theta + 2s\pi)/n$

10c) Soit à calculer $v_n(t_s)$.

Supposons n pair; on sait que $v_n = u \circ w \circ g$.

$g(t_s) = e^{(i\theta + 2is\pi)/n}$

$w(g(t_s)) = e^{(i\theta + 2is\pi)}$

$u(w(g(t_s))) = [e^{(i\theta + 2is\pi)} + e^{-(i\theta + 2is\pi)}]/2 = \cos(\theta + 2s\pi)$

De même, si n pair; on sait que $v_n = h \circ w \circ g$.

$g(t_s) = e^{(i\theta + 2is\pi)/n}$

$w(g(t_s)) = e^{(i\theta + 2is\pi)}$

$h(w(g(t_s))) = [e^{(i\theta + 2is\pi)} - e^{-(i\theta + 2is\pi)}]/2 = i.\sin(\theta + 2s\pi)$