ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème 1

Données :

Les valeurs numériques suivantes pourront servir dans le problème : e = 2,718 ; 1/e = 0,368 ; cos(51°8) = 0,618 ; $e^{0,618} = 1,86$.

On note par f la fonction numérique définie sur R par $f(x) = e^{-\cos x}$.

1 – Etudier la fonction f : parité, périodicité, dérivée.

Construire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Tracer, dans un repère orthonormal, la courbe représentative C de la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$. On précisera les points d'inflexion de f.

2 – Dans cette question, on se propose de rechercher les tangentes à C issues de l'origine O.

2 a – Soit A un point de C d'abscisse a, $0 < a < \pi$.
Ecrire une équation d'une tangente en A à C.
Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que cette tangente passe par l'origine O.

2 b – On définit la fonction numérique φ sur $]0, \pi]$ par :

$$\varphi(x) = \sin x - \frac{1}{x}$$

Etudier précisément les variations de φ.

Montrer que φ passe par un maximum M dont on cherchera le signe.
En déduire que φ s'annule en deux points x_1 et x_2 que l'on positionnera par rapport à $\pi/2$.
Conclure sur le nombre de tangentes à C que l'on peut mener depuis l'origine O.

3 a – Calculer une primitive Φ de φ.

3b – Calculer l'intégrale $F(a, b) = \int_a^b \varphi(x)\, dx$.

Etudier la limite de $F(a, b)$ quand a tend vers 0 et b tend vers π.

Problème 2

On note $M_4(R)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4, à coefficients réels, $U_4(R)$ le sous-ensemble de $M_4(R)$ formé des matrices inversibles, et I la matrice identité d'ordre 4.

1 – On donne la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est inversible.

Déterminer l'inverse A^{-1} de A.

2 – On note par L_i, $i = 1$ à 4, les lignes d'une matrice M de $M_4(R)$; Λ est l'ensemble des lignes de M.

On considère l'ensemble E formé par les trois opérations élémentaires que l'on peut définir sur l'espace Λ des lignes de M ; ces opérations sont :

a) homothétie : $h(L_i) = a\, L_i$, où $i = 1$ à 4, c'est-à-dire que la ligne L_i est remplacée par la ligne $a\, L_i$, a étant un nombre réel non nul.

b) mélange : $m(L_i) = L_i + bL_k$, où i, $k = 1$ à 4, $i \neq k$, c'est-à-dire que la ligne L_i est remplacée par la combinaison de L_i et bL_k, b étant un nombre réel.

c) permutation : $p(L_i) = L_k$ et $p(L_k) = L_i$, où i, $k = 1$ à 4, $i \neq k$, c'est-à-dire que les lignes L_i et L_k sont permutées.

On appellera de façon générique e une opération quelconque de E, e étant selon les cas h, m ou p.

Montrer que h, m et p, applications de Λ dans Λ, admettent des inverses notées h^{-1}, m^{-1} et p^{-1} que l'on exprimera.

3 – Soit M une matrice de $U_4(R)$, et e une application de E.

Par convention, on notera $e(M)$ la matrice de $M_4(R)$ obtenue en appliquant l'opération e à M.

Montrer que $e(M) = e(I).M$

Montrer que $e(I)$ est inversible.

En déduire que $(e(M))^{-1} = M^{-1}.\ e^{-1}(I)$

4 – On considère la matrice B définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 5 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $B = e(A)$ où e est une application de E que l'on précisera.

Calculer l'inverse B^{-1} de B.

5 – Soit L le vecteur-ligne d'élément courant a_i, $i = 1$ à 4, et C le vecteur-colonne d'élément courant b_i, $i = 1$ à 4.

On suppose L et C non nuls.

Quelles sont les dimensions de LC et CL ?

6 – On suppose que $LC + 1 = 0$.

6a – Calculer $(I + CL)C$

6b – La matrice $I + CL$ est-elle inversible ?

7 – On suppose que $LC + 1 \neq 0$.

Montrer que $I + CL$ admet une matrice inverse de la forme $I + k.CL$, où k est un nombre réel :

$(I + CL)^{-1} = I + k.CL$

8 – Soit une matrice M de $U_4(R)$.
On considère la matrice $N = M + CL$.

8a – Montrer que N est inversible si et seulement si : $LM^{-1}C + 1 \neq 0$.

8b – En déduire que, sous cette condition : $N^{-1} = M^{-1} - (M^{-1}CLM^{-1}) / (1 + LM^{-1}C)$

9 – On considère la matrice D définie par :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9a – Montrer que la matrice $D - A$ peut être écrite sous la forme d'un produit CL, où C et L sont respectivement un vecteur-colonne et un vecteur-ligne que l'on précisera.

9b – Montrer que D est inversible

9c – Calculer D^{-1}

10 – On considère la matrice F définie par :

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & x & y & 1 \end{pmatrix}$$

où x et y sont deux nombres réels.

10a – Montrer que $F = A + G$, où G est une matrice que l'on explicitera.

10b – Montrer que G peut être mis sous la forme d'un produit CL, où C et L sont respectivement un vecteur-colonne et un vecteur-ligne que l'on précisera.

10c – En déduire la relation $t(x, y) = 0$ que doivent vérifier x et y pour que F ne soit pas inversible.