

CORRIGÉ DE LA 1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

Les symboles Ln et $\tan$ représentent respectivement le logarithme népérien et la tangente. On donne $\text{Ln } 2 = 0,69$.

1) Comparer les intégrales A et B :

$$A = \int_0^{\pi/4} \text{Ln}(\cos x) dx$$

$$B = \int_0^{\pi/4} \text{Ln}(\cos(\pi/4 - x)) dx$$

En faisant dans B le changement de variable $u = \pi/4 - x$, on obtient directement $A = B$.

2) Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi/4} \text{Ln}(1 + \tan x) dx$

On sait que $\cos(\pi/4 - x) = (\cos x + \sin x)/\sqrt{2}$.

$$1 + \tan x = (\cos x + \sin x)/\cos x$$

$$\begin{aligned} \text{Ln}(1 + \tan x) &= \text{Ln}(\cos x + \sin x) - \text{Ln}(\cos x) = \text{Ln} \sqrt{2} (\cos(\pi/4 - x)) - \text{Ln}(\cos x) = \text{Ln} \sqrt{2} \\ &+ \text{Ln}(\cos(\pi/4 - x)) - \text{Ln}(\cos x) \end{aligned}$$

D'où, en passant à l'intégrale et comme $A = B$, on a $I = \frac{\pi}{4} \text{Ln}(\sqrt{2})$.

Problème 1



Le symbole Ln représente le logarithme népérien.

1) Soit l'application $g :]0, 1[\cup]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie par : $g(x) = \frac{1}{\text{Ln} x}$

Etudier très précisément les variations de g (dérivées, sens de variation, concavité, limites, asymptotes éventuelles, tableau de variation, graphe).

Pour toute la suite du problème, on admettra l'existence d'une primitive G de g , qu'on ne cherchera pas à calculer explicitement.

Il est évident que g est définie sur R^{+*} sauf pour $x = 1$.

Dérivée : $g'(x) = -1 / (x \ln^2 x) < 0$.

Donc g est décroissante.

De même, $g'(x) = (2 + \ln x) / x^2 \ln^3 x$ qui s'annule en $x = e^{-2}$

Donc point d'inflexion en $x = e^{-2}$ et $g(e^{-2}) = -1/2$.

Limites :

Quand $x \rightarrow 0$, g tend vers 0.

Quand $x \rightarrow 1_-$, g tend vers $-\infty$

Quand $x \rightarrow 1_+$, g tend vers $+\infty$

Quand $x \rightarrow +\infty$, g tend vers 0.

Asymptotes : $x = 1$, $x = 0$ (vers $+\infty$)

2) On considère l'ensemble $D =]0, 1/2[\cup]1, +\infty[$.

On définit l'intégrale $J(x)$ par :

$$J(x) = \int_x^{2x} g(t) dt$$



Montrer que $J(x)$ existe pour tout $x \in D$.

L'intégrale n'existe que si 1 n'est pas dans l'intervalle $(x, 2x)$, soit $1 < x$ ou $1 > 2x$, donc $x < 1/2$ ou $x > 1$, ce qui correspond à D .

Avec la notation introduite en Q1, $J(x) = G(2x) - G(x)$.

3) Soit l'ensemble $D^+ = [0, 1/2[\cup]1, +\infty[= D + \{0\}$

On définit l'application $f : D^+ \rightarrow R$ par :

$$\forall x \in D, f(x) = J(x)$$

$$f(0) = 0$$

Montrer que f est dérivable sur D , et calculer f' .

Etudier le signe de f' et en déduire le sens des variations de f .

Sur D , $f(x) = G(2x) - G(x)$, et donc, puisque $G' = g$, on a : $f'(x)$ existe et vaut :

$$f'(x) = 2g(2x) - g(x) = \ln(x/2) / [(\ln x) (\ln 2x)]$$

→ Pour $x < 1/2$, $f'(x)$ est < 0 , donc f est décroissante.

→ Pour $x > 1$, $f'(x)$ est > 0 si $x/2 > 1$, donc $x > 2$; de même, $f'(x) < 0$ si $x < 2$, et on a $f'(x) = 0$ si $x = 2$.

On remarque aussi que la limite de f' quand x tend vers 0 est égale à 0.

4) Démontrer que, $\forall x \in D$:

$$x/\ln(2x) \leq f(x) \leq x/\ln x$$

En déduire les limites de $f(x)$ et de $f(x)/x$ quand $x \rightarrow 0$.

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

D'après les accroissements finis appliqués à f , $f(x) = (2x - x)g(c)$, $x \leq c \leq 2x$.

Comme la fonction g est décroissante (question 1), $g(x) \geq g(c) \geq g(2x)$, donc :

$$x/\ln(2x) \leq f(x) \leq x/\ln x$$

et

$$1/\ln(2x) \leq f(x)/x \leq 1/\ln x$$

On en déduit quand x tend vers 0 :

a) $f(x)$ tend vers 0

b) $f(x)/x$ tend vers 0



Donc on peut prolonger f par continuité en 0.

De même, la limite de $(f(x) - f(0))/(x - 0) = f(x)/x$ est égale à 0, qui est aussi la limite de f' en 0 (remarque de la question 3), donc f est dérivable en 0.

5) Quelles sont les limites de $f(x)$ et de $f(x)/x$ quand $x \rightarrow +\infty$?

Toujours en utilisant la double inégalité de la question 4, on a :

Quand x tend vers $+\infty$:

a) $f(x)$ tend vers $+\infty$

b) $f(x)/x$ tend vers 0

6) Soit l'application $h :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$u \rightarrow h(u) = \ln(u) - 2u + 2$$

Montrer qu'il existe un réel unique, noté α , $0 < \alpha < 1/2$, tel que $h(\alpha) = 0$.

Montrer que $\forall u \in [\alpha, 1]$, on a $\ln(u) \geq 2u - 2$.

En déduire que $f(x)$ est majorée, $\forall x \in [\alpha, 1/2]$, par $(\ln[(2x - 1)/(x - 1)])/2$.

Calculer la limite de f quand $x \rightarrow 1/2$.

En étudiant brièvement $h(u)$ sur $]0, 1]$, on voit que h est croissante de $-\infty$ à $1 - \ln 2$ lorsque u passe de 0 à $\frac{1}{2}$, admet un maximum égal à $1 - \ln 2$ en $\frac{1}{2}$ et décroît ensuite jusqu'à 0.

Donc il existe un nombre α , compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, tel que $h(\alpha) = 0$.

Pour $u \geq \alpha$, $h(u)$ est positive ou nulle, donc $\ln(u) \geq 2u - 2$.

Donc $1/\ln(u) \leq 1/(2u - 2)$.

En reportant cette inégalité dans la définition de f , on voit que $f(x)$ est majorée par l'intégrale :

$$f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{du}{(2u - 2)} = (\ln[(2x - 1)/(x - 1)])/2.$$

Quand $x \rightarrow \frac{1}{2}$, $(\ln[(2x - 1)/(x - 1)])/2$ tend vers $-\infty$ et donc f aussi.

7) Montrer que, $\forall u \geq 1$, $\ln(u) \leq u - 1$.

En déduire la limite de f quand $x \rightarrow 1$.



Comme en Question 6, en étudiant les variations de $v(u) = \ln(u) - (u - 1)$, on trouve facilement que $\ln(u) \leq u - 1$ quand $u \geq 1$.

On en déduit en minorant $g(x)$ par $1/(u - 1)$ dans l'intégrale que $f(x) \geq \ln[(2x - 1)/(x - 1)]$; or $\ln[(2x - 1)/(x - 1)]$ tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow 1$, donc f aussi.

8) Construire le tableau de variations de f .

Donc, il résulte de tout ce qui précède, que :

Pour x entre 0 et $\frac{1}{2}$: f décroît de 0 à $-\infty$

Et pour $x \geq 1$:

a) de 1 à 2, f décroît de $+\infty$ au minimum $m = J(2) = G(4) - G(2)$,

b) puis f croît de m à $+\infty$ pour $x \geq 2$.

Problème 2

Soit l'application $f :]-1, +1[\rightarrow \mathbb{R}$, telle que :

$$x \rightarrow f(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$$

1) On veut montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]-1, +1[$ et que, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme réel P_n de la variable réelle, de degré n , tel que :

$$\forall x \in]-1, +1[, f^{(n)}(x) = P_n(x) / (1 - x^2)^{n+1/2}$$

a) Calculer les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 .

b) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]-1, +1[$ et exprimer P_{n+1} sous la forme :

$$(R1) \quad P_{n+1}(x) = a(x) P'_n(x) + \alpha(n) b(x) P_n(x)$$

où $a(x)$, $b(x)$ et $\alpha(n)$ sont respectivement des fonctions de x et n que l'on explicitera.

2) Montrer que, $\forall x \in]-1, +1[: (1 - x^2) f'(x) - x f(x) = 0$

3) Rappel : Formule de Leibniz : on rappelle que la dérivée d'ordre n du produit de deux fonctions u et v , notée $(uv)^{(n)}$, est donnée par la formule suivante :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$



En utilisant les résultats des questions (2) et (1), montrer que la suite de polynômes (P_n) vérifie la relation :

$$(R2) \quad P_{n+1}(x) - (2n + 1)x P_n(x) - n^2(1 - x^2) P_{n-1}(x) = 0$$

4) Etablir, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, que $P'_n(x) = n^2 P_{n-1}(x)$

5) En déduire que, pour tout n entier, $n \neq 0$ et $n \neq 1$, on a la relation (R3) :

$$(R3) \quad n^2 P_n(x) - (2n - 1)x P'_n(x) - (1 - x^2) P''_n(x) = 0$$

6) Pour tout n entier, calculer $P_n(0)$ et $P_n(1)$

1a) Des calculs simples conduisent à :

$$P_0 = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = 2x^2 + 1, P_3(x) = 6x^3 + 9x$$

b) Procédons par récurrence.

Soit la propriété « f est dérivable à l'ordre n et $\forall x \in]-1, +1[, f^{(n)}(x) = P_n(x)/(1 - x^2)^{n+1/2}$ »

La propriété est vraie au rang 0, avec $P_0 = 1$.

Supposons la propriété vraie au rang n .

$P_n(x) / (1 - x^2)^{n+1/2}$ est dérivable, puisque $P_n(x)$ et $(1 - x^2)^{n+1/2}$ sont dérivables sur l'intervalle $] -1, +1[$, et donc $f^{(n+1)}$ existe et :

$$f^{(n+1)}(x) = (1 - x^2)^{-n-1/2} P'_n(x) + (2n + 1)x(1 - x^2)^{-n-3/2} P_n(x)$$

$$f^{(n+1)}(x) = (1 - x^2)^{-n-3/2} [(1 - x^2)P'_n(x) + (2n + 1)x P_n(x)]$$

D'où la relation (R1) recherchée avec $P_{n+1}(x) = a(x) P'_n(x) + \alpha(n) b(x) P_n(x)$,
et $a(x) = (1 - x^2)$, $b(x) = x$ et $\alpha(n) = (2n + 1)$.

2) $f'(x) = x(1 - x^2)^{-3/2} = x f(x) (1 - x^2)^{-1}$
D'où $(1 - x^2) f'(x) = x f(x)$



3) Partons de la relation $(1 - x^2) f'(x) - x f(x) = 0$, et dérivons la n fois,
avec d'abord $u = (1 - x^2)$ et $v = f'$, puis avec $u = x$ et $v = f$.

On remarque que $u' = -2x$, $u'' = -2$, puis $u^{(k)} = 0$ dès que $k \geq 3$.
 $v = f'$, $v^{(n)} = f^{(n+1)}$, $v^{(n-1)} = f^{(n)}$, $v^{(n-2)} = f^{(n-1)}$.

La contribution du terme $(1 - x^2) f'(x)$ sera donc $(1 - x^2) f^{(n+1)} - 2nx f^{(n)} - n(n-1) f^{(n-1)}$.

De façon similaire, la contribution du terme $x f(x)$ sera $x f^{(n)} - n f^{(n-1)}$.

D'où : $(1 - x^2) f^{(n+1)} - (2n+1)x f^{(n)} - n^2 f^{(n-1)} = 0$.

Remplaçons respectivement $f^{(n+1)}$, $f^{(n)}$ et $f^{(n-1)}$ par leurs expressions issues de la question 1 faisant intervenir P_{n+1} , P_n , et P_{n-1} .

$$(1 - x^2) P_{n+1}(x) (1 - x^2)^{-n-3/2} - (2n+1)x P_n(x) (1 - x^2)^{-n-1/2} - n^2 P_{n-1}(x) (1 - x^2)^{-n+1/2} = 0.$$

$$\text{Ou encore : } P_{n+1}(x) (1 - x^2)^{-n-1/2} - (2n+1)x P_n(x) (1 - x^2)^{-n-1/2} - n^2 P_{n-1}(x) (1 - x^2)^{-n+1/2} = 0.$$

Et en simplifiant par $(1 - x^2)^{-n-1/2}$, on obtient la relation (R2) recherchée :

$$(R2) \quad P_{n+1}(x) - (2n + 1)x P_n(x) - n^2(1 - x^2)P_{n-1}(x) = 0$$

4) Cherchons à établir, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, que $P'_n(x) = n^2 P_{n-1}(x)$

D'après (R2), on a : $P_{n+1}(x) - (2n + 1)x P_n(x) = n^2(1 - x^2) P_{n-1}(x)$

Or, d'après la question 1b, $P_{n+1}(x) - (2n + 1)x P_n(x) = (1 - x^2) P'_n(x)$

Il s'en suit $n^2(1 - x^2) P_{n-1}(x) = (1 - x^2) P'_n(x)$, et donc $P'_n(x) = n^2 P_{n-1}(x)$.

5) Ecrivons la relation (R2) au rang n :

$$P_n(x) - (2n - 1)x.P_{n-1}(x) - (n-1)^2(1 - x^2) P_{n-2}(x) = 0$$

D'après la question 4, $P_{n-1}(x) = P'_n(x)/n^2$, et donc en dérivant encore une fois :

$$P'_{n-1}(x) = P''_n(x)/n^2,$$

$$\text{Et d'après la question 4, } P'_{n-1}(x) = (n-1)^2 P_{n-2}(x) = P''_n(x)/n^2.$$

En remplaçant dans (R2), on obtient :

$$P_n(x) - (2n - 1)x P'_n(x)/n^2 - (1 - x^2) P''_n(x)/n^2 = 0$$

$$\text{Soit encore : } n^2 P_n(x) - (2n - 1)x P'_n(x) - (1 - x^2) P''_n(x) = 0$$

6) On sait que l'on a $P_0(0) = 1$ et $P_0(1) = 1$, $P_1(0) = 0$ et $P_1(1) = 1$.

D'après la relation (R2) prise en $x = 0$, on a :

$$P_{n+1}(0) - n^2 P_{n-1}(0) = 0$$



De même, toujours avec la relation (R2) prise en $x = 1$, on a :

$$P_{n+1}(1) - (2n + 1)P_n(1) = 0$$

Calcul de $P_n(0)$:

Pour n pair, $n = 2p$, $P_{2p+1}(0) - (2p)^2 P_{2p-1}(0) = 0$, qui va aller jusqu'à $P_1(0) = 0$, donc $P_{2p+1}(0) = 0$.

Pour n impair, $n = 2p-1$, $P_{2p}(0) - (2p-1)^2 P_{2p-2}(0)$, d'où :

$$P_{2p}(0) = (2p-1)^2 (2p-3)^2 (2p-5)^2 \dots 1$$

Calcul de $P_n(1)$:

$$P_n(1) - (2n - 1)P_{n-1}(1) = 0$$

$$P_n(1) = (2n - 1)(2n - 3) \dots 1$$