ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est composée d'un exercice et deux problèmes indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice

Les symboles *Ln* et *tan* représentent respectivement le logarithme népérien et la tangente. On donne *L*n 2 = 0,69.

1) Comparer les intégrales A et B :

$$A = \int_0^{\pi/4} Ln(\cos x)\, dx$$

$$B = \int_0^{\pi/4} Ln(\cos(\pi/4 - x))\, dx$$

2) Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi/4} Ln(1 + \tan x)\, dx$

Problème 1

Le symbole *Ln* représente le logarithme népérien et *R* désigne l'ensemble des nombres réels.

1) Soit l'application $g :]0, 1 [\cup]1, +\infty [\to R$, définie par : $g(x) = \dfrac{1}{Lnx}$

Etudier très précisément les variations de *g* (dérivées, sens de variation, concavité, limites, asymptotes éventuelles, tableau de variation, graphe).

Pour toute la suite du problème, on admettra l'existence d'une primitive *G* de *g*, qu'on ne cherchera pas à calculer explicitement.

2) On considère l'ensemble $D =]0, 1/2[\cup]1, +\infty[$.

On définit l'intégrale $J(x)$ par :

$$J(x) = \int_{x}^{2x} g(t)\,dt$$

Montrer que $J(x)$ existe pour tout $x \in D$.

3) Soit l'ensemble $D^{+} = [0, ½[\cup]1, +\infty[= D \cup \{0\}$

On définit l'application $f : D^{+} \to R$ par :

$$\forall\, x \in D,\ f(x) = J(x)$$
$$f(0) = 0$$

Montrer que f est dérivable sur D, et calculer sa dérivée $f\,'$.

Etudier le signe de $f\,'$ et en déduire le sens des variations de f.

4) Démontrer que, $\forall\, x \in D$:

$$\frac{x}{Ln(2x)} \le f(x) \le \frac{x}{Ln\,x}$$

En déduire les limites de $f(x)$ et de $f(x)/x$ quand $x \to 0$.

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

5) Quelles sont les limites de $f(x)$ et de $f(x)/x$ quand $x \to +\infty$?

6) Soit l'application $h :]0, 1] \to R$, définie par :

$$h(u) = Ln(u) - 2u + 2$$

Montrer qu'il existe un réel unique, noté α, $0 < \alpha < ½$, tel que $h(\alpha) = 0$.

Montrer que $\forall$ u $\in [\alpha, 1]$, on a $Ln(u) \ge 2u - 2$.

En déduire que $f(x)$ est majorée, pour tout $x \in [\alpha, ½]$, par $\frac{1}{2} Ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)$.

Calculer la limite de f quand $x \to ½$.

7) Montrer que, $\forall\, u \ge 1$, $Ln(u) \le u - 1$.

En déduire la limite de f quand $x \to 1$.

8) Construire le tableau de variations de f.

Problème 2

Soit l'application f :]-1, +1[$\to R$, telle que :

$$f(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$$

1) On veut montrer que f est indéfiniment dérivable sur]-1, +1[et que, $\forall\, n \in N$, il existe un polynôme réel P_n de la variable réelle x, de degré n, tel que :

$$\forall\, x \in\ ]-1, +1[,\ f^{(n)}(x) = P_n(x) / (1 - x^2)^{n+1/2}$$

a) Calculer les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3.

b) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur]-1, +1[et exprimer P_{n+1} sous la forme :

$$(R1) \qquad P_{n+1}(x) = a(x)\, P'_n(x) + \alpha(n)\, b(x)\, P_n(x)$$

où $a(x)$, $b(x)$ et $\alpha(n)$ sont respectivement des fonctions de x et n que l'on explicitera.

2) Montrer que, $\forall\, x \in$]-1, +1[: $(1 - x^2)\, f'(x) - x\, f(x) = 0$

3) Rappel : Formule de Leibniz : on rappelle que la dérivée d'ordre n du produit de deux fonctions u et v, notée $(uv)^{(n)}$, est donnée par la formule suivante :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(k)}\, v^{(n-k)}$$

En utilisant les résultats des questions (2) et (1), montrer que la suite de polynômes (P_n) vérifie la relation :

$$(R2) \qquad P_{n+1}(x) - (2n + 1)x\, P_n(x) - n^2(1 - x^2)\, P_{n-1}(x) = 0$$

4) Etablir que, $\forall$ n $\in$ N*, $P'_n(x) = n^2 P_{n-1}(x)$

5) En déduire que, pour tout n entier, $n \neq 0$ et $n \neq 1$, on a la relation $(R3)$:

$$(R3) \qquad n^2 P_n(x) - (2n - 1)x\, P'_n(x) - (1 - x^2)\, P''_n(x) = 0$$

6) Pour tout n entier, calculer $P_n(0)$ et $P_n(1)$