AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

Dans le plan orthonormé usuel, on donne les points $A(m)$ et $B(m)$ de coordonnées :

$A(m) : ((\frac{1}{2} + m), 0)$

$B(m) : (0, (\frac{1}{2} - m))$

où m est un paramètre réel appartenant à l'intervalle $U = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

On note par $D(m)$ la droite passant par les points $A(m)$ et $B(m)$.

1) Donner une équation de $D(m)$ sous la forme :

$$a(m)\, x + b(m)\, y + c(m) = 0$$

où a, b et c sont trois fonctions de m, dérivables, que l'on explicitera.

Solution

Equation de $D(m)$:

$(y - 0) / (x - m - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - m) / (0 - m - \frac{1}{2})$

$D(m) : x(\frac{1}{2} - m) + y(m + \frac{1}{2}) + (m^2 - \frac{1}{4}) + 0$

$a(m) = \frac{1}{2} - m$, $b(m) = m + \frac{1}{2}$, $c(m) = m^2 - \frac{1}{4}$

2) On note par $D'(m)$ la droite d'équation : $a'(m)\, x + b'(m)\, y + c'(m) = 0$, a', b' et c' étant les dérivées respectives de a, b et c.
Montrer que les droites $D(m)$ et $D'(m)$ se coupent en un point $M(m)$ dont on déterminera les coordonnées.

Solution

Equation de $D'(m)$: $y - x + 2m = 0$

En reportant y dans l'équation de $D(m)$, on obtient les coordonnées X et Y du point d'intersection $M(m)$:

$$X = (m + \frac{1}{2})^2$$

$$Y = (\frac{1}{2} - m)^2$$

On remarque que X et Y varient entre 0 et 1.

3) Déterminer le lieu géométrique du point $M(m)$ quand m parcourt l'intervalle U. Tracer sa courbe dans le repère orthonormé usuel.

Solution

$$m + \frac{1}{2} = X^{1/2}$$

$$m = X^{1/2} - \frac{1}{2}$$

D'où : $Y = (\frac{1}{2} - X^{1/2} + \frac{1}{2})^2 = (1 - X^{1/2})^2 = X - 2\, X^{1/2} + 1$.

$Y' = 1 - X^{-1/2} = (X^{1/2} - 1) / X^{1/2}$, qui est négative puisque X est entre 0 et 1.

Quand X tend vers 0, Y tend vers 1.
Quand x tend vers 1, Y tend vers 0.

Les valeurs de Y' en 0 et 1 sont : $Y'(0) = -\infty$, et $Y'(1) = 0$

La dérivée seconde est $- X^{-3/2} / 2$, négative.

Y est donc décroissante monotone de 1 à 0 quand X varie de 0 à 1.

Problème 2

Le symbole *Ln* désigne le logarithme népérien.
On donne les valeurs numériques approchées suivantes :
$e = 2{,}718$, $e^{1/2} = 1{,}65$; $e^2 = 7{,}39$; $e^{2,1} = 8{,}17$; $e^{2,2} = 9{,}03$; $e^{2,3} = 9{,}97$; $e^{2,4} = 11{,}02$; $e^{2,5} = 12{,}18$; $Ln2 = 0{,}69$; $Ln5 = 1{,}61$.

<u>Partie A</u> :

On considère la fonction *f*, définie sur *R*, qui, à tout *x* réel associe :

$$f(x) = \mathrm{e}^x(x - 1) + x^2$$

1) Etudier très précisément les variations de *f* (dérivée, sens de variation, limites, asymptotes éventuelles, points marquants et tangentes en ces points). Dresser le tableau de variation.
On ne demande pas l'étude de la concavité de *f*.

<u>Solution</u>

$f'(x) = x(e^x + 2)$
La dérivée *a* le signe de *x*.

Lim $f(x) = +\infty$ quand x tend vers $+\infty$
Lim $f(x) = +\infty$ quand x tend vers $-\infty$
Pas d'asymptotes, branches asymptotiques.
En outre, on remarque que $f(x)/x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+-\infty$, et que :

$x \dashrightarrow +\infty$ $f(x)/x = e^x[(1 - 1/x) + xe^{-x}]$ équivalent à e^x
$x \dashrightarrow -\infty$ $f(x)/x \# x^2$

Points marquants :
$f(0) = -1, f'(0) = 0$

X	$-\infty$ 0	$+\infty$
f'	–	+
F	$+\infty$ ↘	-1 ↗ $+\infty$

2) Etudier l'existence des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Dans la suite du problème, on notera *a* la solution positive de l'équation $f(x) = 0$. Montrer que *a* appartient à l'intervalle $L = [\frac{1}{2}, 1]$. Encadrer l'autre racine *b* par un intervalle (a, b) de longueur $\frac{1}{2}$ la contenant.
Donner les équations des tangentes à la courbe représentative de *f* aux points d'abscisses *a* et *b*.

Solution

$f(x) = 0$?
Au vu des variations de f, l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines, l'une positive (a), l'autre négative notée b.
Calculs de positionnement :
Pour a :
$f(1) = 1$
$f(\frac{1}{2}) = (1 - 2e^{1/2})/4$ # $- 0,57$
Donc $\frac{1}{2} < a < 1$.

Pour b :
$f(- 1) = (e - 2)/e$ # $0,26$
$f(- 1/2) = (e^{1/2} - 6)/4\, e^{1/2}$ # $- 0,66$
Donc $- \frac{1}{2} < b < - 1$.

Equation de la tangente en $(a, 0)$:
$(y - 0)/(x - a) = f'(a) = a\,(e^{a} + 2)$
On pourrait remplacer e^{a} par $a^2/(1 - a)$ puisque $f(a) = 0$.
Equation de la tangente en $(b, 0)$:
$(y - 0)/(x - b) = f'(b) = b\,(e^{b} + 2)$

3) Calculer l'intégrale $A = \int_0^1 f(x)dx$

Solution

Cherchons une primitive F de f.
$F(x) = e^{x}(x - 1) - e^{x} + x^3/3 = xe^{x} - 2e^{x} + x^3/3 + C$
$A = F(1) - F(0) = (7 - 3e)/3$

4) Calculer en fonction de a l'intégrale $B = \int_a^1 f(x)dx$

Solution

Comme pour la question 3, $B = F(1) - F(a)$
$B = e^{a}(2 - a) - a^3/3 + (1 - 3e)/3$

Partie B **:**

On considère la fonction g, définie sur R^+, par :

$$g(x) = e^x / (e^x + x)$$

1) Etudier précisément les variations de g (dérivée, sens de variation, limites, asymptotes éventuelles, points marquants et tangentes en ces points). Dresser le tableau de variation. Indiquer les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

Solution

$g'(x) = e^x(x - 1)/(e^x + x)^2,\ x > 0$

g' est donc négative quand $x < 1$, positive pour $x > 1$, et nulle quand $x = 1$.

Lim $g(x) = 1$ quand x tend vers $+\infty$
Lim $g(x) = 1$ quand x tend vers 0
Asymptote horizontale $y = 1$

$g(1) = e/(1 + e) = 0{,}73$

g décroit donc sur $[0, 1[$, allant de 1 à 0,73, passe par un minimum égal à 0,73 quand $x = 1$, puis croît jusqu'à 1 sur $]1, +\infty[$.

Pente en (0, 1) :
$(g(x) - 1) / x = - 1 / (e^x + x)$ --> - 1 quand x --> 0

Tangente en (0, 1) : $y = 1 - x$

2) On veut étudier la concavité de g.
Calculer la dérivée seconde g'' de g.
Montrer que g'' peut être mise sous la forme :

$$g''(x) = e^x (x + e^x)^{-3}\, U(x)$$

où $U(x)$ est une fonction de x que l'on explicitera.
Montrer que U ne peut s'annuler que pour $x > 2$.
Donner un intervalle pour l'abscisse du point d'inflexion.

Solution

$g''(x) = e^x (x + e^x)^{-3} [(x - 1)^2 + 1 + e^x(2 - x)]$
$U(x) = (x - 1)^2 + 1 + e^x(2 - x)$

a) Si $2 - x > 0$, *i.e.* $x < 2$, $U(x)$ est une somme de terme positifs
b) $x = 2$, $U(2) = 2 > 0$
c) $U(x)$ ne peut s'annuler que si $x > 2$

Cherchons à encadrer la racine r de U, c'est-à-dire l'abscisse du point d'inflexion :

$g''(2) = 2e^2/(2 + e^2)^3$ # 0,018
$g''(2{,}5) = 3{,}25 - 0{,}5e^{2,5}$ # - 2,84
D'où r compris entre 2 et 2,5.

Affinons cet encadrement :

$U''(2{,}4) = 2{,}96 - 0{,}4e^{2,4}$ # - 1,45
$U''(2{,}3) = 2{,}69 - 0{,}3e^{2,3}$ # - 0,30
$U''(2{,}2) = 2{,}44 - 0{,}2e^{2,2}$ # + 0,63

Plus précisément, r est entre 2,2 et 2,3.

3) Tracer la courbe G représentative de g.

Solution

Décroissante et convexe entre 0 et 1, minimum en 1 égal à 0,73, croît pour $x > 1$ et convexe entre 1 et r, concave ensuite.

4) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique ?
Quelle est cette racine ?

Solution

$g(x) = x \Longleftrightarrow e^x / (e^x + x) = x \Longleftrightarrow e^x(x - 1) + x^2 = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0$
D'après la partie A, il existe sur R^+ une solution unique a, comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, telle que $g(a) = a$.

5) Montrer que pour tout $x \in L$, $g(x) \in L$.

Solution

$g(1) = 0{,}73$ (cf question 1, Partie B).
$g(\frac{1}{2}) = e^{1/2} / (0{,}5 + e^{1/2})$ # 0,77

Comme g est décroissante monotone entre 0 et 1, pour tout x entre $\frac{1}{2}$ et 1, $g(x)$ est entre 0,73 et 0,77, et donc a fortiori entre 0 et 1.
Donc pour tout $x \in L$, $g(x) \in L$.

6) Montrer que pour tout $x \in L$, $|g'(x)| \leq M$, où M est un majorant inférieur ou égal à ½ que l'on déterminera.

Solution

Calculons | $g'(\frac{1}{2})$ | = 0,5 $e^{1/2}$ / (0,5 + $e^{1/2}$)² # 0,18

Comme |g'(1)| = 1, | g' | décroit de façon monotone sur [0, 1] entre 1 et 0.
Donc sur L, | g' | décroit de façon monotone de 0,18 à 0.

Prenons $M = \frac{1}{5}$.

Remarque : on aurait bien sûr pu majorer | g' | par 0,18 sur L.

Partie C **:**

On définit la suite $u(n)$, n entier naturel non nul, par :

$u(1) = \frac{1}{2}$

$u(n) = g(u(n\text{-}1))$, pour tout $n > 1$

1) Montrer que, pour tout $n \in N^*$, u(n) $\in L$.

Solution

Par récurrence :

a) $u(1) \in L$ donc $g(u(1)) = u(2) \in L$, d'après la question 5, partie B.
b) Supposons $u(n) \in L$; pour la même raison, $g(u(n)) = u(n+1) \in L$.

2) Démontrer que, pour tout $n > 1$:

$$|u(n) - a| \leq M.|u(n-1) - a|$$

Solution

Théorème des accroissements finis :
$|g(u(n-1) - g(a)| = |u(n-1) - a|.|g'(c)|$, c entre $u(n\text{-}1)$ et a.

Or, par définition de la suite, $|g(u(n-1) - g(a)| = |u(n) - a|$, car $g(a) = a$ (question 4, Partie B).

Comme $u(n\text{-}1)$ et a sont dans L, $|g'(c)|$ est majoré par $M = \frac{1}{5}$.

D'où le résultat de majoration recherché : $|u(n) - a| \leq M.|u(n-1) - a|$

3) En déduire que $u(n)$ converge vers a.

Solution

On en déduit, par itération :
$|u(n)-a| \leq M^{n-1}.|u(1)-a|$

Et $|u(1)-a| < \dfrac{1}{2}$ (ce qui est certain car $u(1) = g(\dfrac{1}{2}) = 0,77$ et a $\in L$).

D'où :

$|u(n)-a| \leq \dfrac{M^{n-1}}{2} = 0,5\ (0,2)^{n-1}$

Il s'en suit que quand n tend vers l'infini, $|u(n)-a|$ tend vers 0.

4) Combien de termes de la suite faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de a à 10^{-7} près ?

Solution

Ecrivons $0,5\ (0,2)^{n-1} = 10^{-7}$
$Ln0,5 + (n-1)Ln(0,2) = -7\ Ln10$
D'où n est le premier entier supérieur à $(6Ln2 + 8Ln5)/Ln5$ # 10,6, soit $n = 11$.