AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien de base e, e = 2,718.

Partie A

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x, définie sur R^{+*}, x > 0, par :

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) - \mathrm{Ln}\, x$$

Etudier très précisément les variations de h.
On étudiera en particulier le signe et les variations de h' et h'' pour établir le tableau complet des variations de h ; on n'oubliera pas les points caractéristiques, leurs tangentes, les limites et les asymptotes éventuelles de h, etc.

Quand x→ + ∞, h(x) tend vers + ∞
Quand x → 0, h(x) tend vers - ∞

$h'(x) = (x-1)^2/2\,x^2$
h' est donc positive pour x > 0, et nulle pour x = 1

$h''(x) = (x-1)/x^3$
h'' est négative pour x < 1, positive pour x > 1, nulle en x = 1
Donc h' décroit sur (0, 1) de + ∞ à 0, et croît de 0 à 1/2 sur (1,+ ∞).

	0	1	+ ∞
h''	-	0	+
h'	+ ∞	0	½ (donc h' > 0)
h	- ∞	0	+ ∞

h est donc strictement croissante sur R^+, de $-\infty$ à $+\infty$, $h(x) < 0$ pour $x < 0$, et $h(x) > 0$ pour $x > 0$.

La courbe représentant h coupe l'axe des abscisses en un point unique, d'abscisse 1.
Pente au point (1, 0) : $h'(1) = 0$ (tangente horizontale)

Concavité : point d'inflexion en $x = 1$; évidente selon le signe de h'' (concave avant le point d'inflexion, convexe ensuite)

Asymptotes :
$h(x)/x$ tend vers 1/2 quand $x \rightarrow +\infty$.
$h(x) - x/2$ est équivalent à $-\text{Ln } x$.
Pas d'asymptote.

Partie B

1) Soient les deux fonctions a(t) et b(t) de la variable réelle t, $t \in J =]-1, +\infty[$, définies par :

$$a(t) = \frac{1}{t+1} \quad \text{et} \quad b(t) = \text{Ln}(1+t)$$

Donner les développements limités à l'ordre 3 de a(t) et b(t) au voisinage de 0.

$a(t) \sim 1 - t + t^2 - t^3$

$b(t) \sim t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

2) Montrer que $b(t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$, pour $t \in J$.

Soit $u(t) = \text{Ln}(1 + t) - (t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3})$.
Montrons que $u(t) \leq 0$.

$u'(t) = -t^3 / (1 + t)$
u' est positive sur (-1, 0), négative ensuite, et nulle en $t = 0$.
Donc u croît sur (- 1, 0) de $-\infty$ à 0, puis décroît sur $(0, +\infty)$ de 0 à $-\infty$.
Comme la valeur maximale de u est 0 pour $t = 0$, pour tout t dans J, $u(t) \leq 0$, d'où le résultat recherché.

3) On considère la fonction numérique f de la variable réelle $t \in J =]-1, +\infty[$, définie par :

$$f(t) = \frac{(1+t)^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{t})}}{e} \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

3a - Quel est le signe de f ?

$f(t) = \exp[(\text{Ln}(1 + t)).(t+2)/2t - 1]$, donc positive comme toute exponentielle.

3b - Montrer que f est continue en 0.
$\text{Ln } f(t) = - 1 + (1/t \ + 1/2)\text{Ln}(1 + t)$

En utilisant le développement de $\text{Ln}(1 + t)$:
$\text{Ln } f(t) \sim - 1 + \ (1/t \ + 1/2)(t - t^2/2 + t^3/3) = t^2/12$
$\text{Ln } f(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0 ;
Donc $f(t)$ tend vers $e^0 = 1$ quand t tend vers 0.
Comme la fonction f a été définie en 0 par $f(0) = 1$, f est donc continue en 0.

4) Calculer $f\,'(t)$. Montrer que f est dérivable en 0.

On sait que $\text{Ln } f(t) = - 1 + (1/t \ + 1/2)\text{Ln}(1 + t)$
Donc $f'(t)/f(t) = (1/t \ + 1/2)(1/(1 + t)) - \text{Ln}(1 + t)/t^2$

Existe-t-il $f'(0)$?
Toujours avec le DL de $\text{Ln}(1+t)$, on a :
$f'(t)/f(t) \sim (1/t \ + 1/2)(1 - t + t^2) - (t - t^2/2 + t^3/3)/t^2 \sim t/6$ qui tend vers 0.
$\text{Lim } f'(t) = 0$ quand $t \rightarrow$ vers 0

Par ailleurs, $(f(t) - f(0))/(t - 0) = \{\exp[(1/t + ½)(\text{Ln}(1 + t)).- 1] - 1\}/t$

$[(1/t + ½)(\text{Ln}(1 + t)).- 1] \sim (1/t \ + 1/2)(1 - t + t^2) - 1 = t^2/12$
$\exp(t^2/12) \sim 1 + t^2/12$
Donc $f'(t)/f(t) \sim t/12 \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$.
Comme $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ et f est dérivable et f' continue en 0.

Partie C

1) On considère la fonction numérique g de la variable réelle t, $t \in J =]-1, +\infty[$, définie par :

$$g(t) = \frac{1 + t - \frac{1}{1+t}}{2} - \text{Ln}(1 + t)$$

Etablir un lien entre g et h (h introduite à la Partie A).
Il est évident que $g(t) = h(1 + t)$.
Les variations de g s'en déduisent.

2) Montrer que la dérivée $f\,'(t)$ peut être mise sous la forme $\frac{f(t).g(t)}{t^2}$, pour $t \neq 0$.

On a vu (question 4, partie B), que $f'(t)/f(t) = (1/t \ + 1/2)(1/(1 + t)) - \text{Ln}(1 + t)/t^2$
$f'(t)/f(t) = [t^2(1/t \ + 1/2)(1/(1 + t)) - \text{Ln}(1 + t)]/t^2$
$= [((1 + t)^2 - 1)/2(1 + t)) - \text{Ln}(1 + t)]/t^2$
$= [((1 + t) - 1/(1 + t))/2 - \text{Ln}(1 + t)]/t^2 = g(t)/t^2$

D'où : $f'(t) = f(t).g(t)/t^2$

3) Démontrer que f ’ est continue pour tout $t \in J$.
On sait que f et g étant définies et continues sur J, leur produit également.
$f'(t) = f(t)\, g(t)/t^2$ l’est donc aussi sur U, sauf en 0.
Or, d’après la question 4 de la partie B, f’ est continue en 0.
f’ est donc continue sur J.

4) A partir des tableaux de variations de g et f, montrer que $f(t) \geq 1$ pour tout $t \in J$.
On sait que $g(t) = h(1+t)$ (h étudiée en Partie A), donc s’annule en $t = 0$, est négative pour $-1 < t < 0$, et est positive pour $t > 0$.
Par ailleurs, f est strictement positive (question 3a, partie B)

Donc f’ est négative pour $t < 0$, et positive pour $t > 0$ (et non définie en 0, mais sa continuité a été vue précédemment).
Donc f est décroissante sur $]-1, 0[$, croissante pour $t > 0$, et sa valeur minimale est $f(0) = 1$.
On en déduit donc que, pour tout appartenant à J, $f(t) \geq 1$.

5) Montrer que $\mathrm{Ln}\, f(t) \leq \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6}$ pour $t \in J$.

$\mathrm{Ln}\, f(t) = -1 + (1/t + 1/2)\mathrm{Ln}(1 + t)$
Comme $\mathrm{Ln}(1 + t) \leq t - t^2/2 + t^3/3$ (question 2, Partie B), on a :
$\mathrm{Ln}\, f(\underline{t}) \leq -1 + (1/t + 1/2)\,(t - t^2/2 + t^3/3)$ puisque $(1/t + ½) > 0$

En développant, on trouve aisément que $\mathrm{Ln}\, f(t) \leq \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6}$

Partie D

Soit une suite $\{u_n\}$, à termes positifs, n entier > 0 ; on définit la suite U_n par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

1) Montrer qu’une condition nécessaire pour que la suite $\{U_n\}$ admette une limite finie U est que $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Supposons que U_n converge vers U, $U < +\infty$.
$U_n - U_{n-1} = u_n$
$\mathrm{Lim}_{n \to +\infty} (U_n - U_{n-1}) = U - U = 0 = \lim u_n$

2) Que peut-on dire du comportement de la suite U_n si u_n ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$?
On sait que si $A \Rightarrow B$, $B^c \Rightarrow A^c$, où A^c et B^c sont les contraires de A et B.
Donc, de la question 1, on déduit que si u_n ne tend pas vers 0, alors U_n ne converge pas vers une limite finie U (elle est divergente).

3) Pour x réel > 0, n entier > 0, on définit la suite de fonctions $\{u_n(x)\}$ de terme général :

$$u_n(x) = \frac{(nx)^n \sqrt{n}}{n!}$$

Montrer que, pour $x > 0$, le ratio $u_{n+1}(x)/u_n(x)$ est égal à $e.x.f(\frac{1}{n})$ où f a été définie en B3.
Calcul immédiat en remarquant que $f(1/n) = [(n+1)/n]^{n+1/2}$

4) Dans cette question, on suppose que $ex \geq 1$.
4a – Montrer que la suite de terme général $\{u_n(x)\}$, n entier > 0, est une suite croissante.
$u_{n+1}(x)/u_n(x) \geq f(1/n)$, lui-même ≥ 1, d'après les variations de f (question 4, Partie C).
Comme $u_n(x)$ est positif, la suite $\{u_n(x)\}$ est croissante.

4b - En déduire alors la nature de la suite associée $\{U_n(x)\}$ où $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$.
Pour tout entier n > 0, $u_n(x) \geq u_1(x)$ puisque u_n est croissante.
Soit m la limite de $u_n(x)$, alors on a $m \geq u_1(x) > 0$, ce qui montre que la suite $\{u_n\}$ ne converge pas vers 0.
Par conséquent, d'après la question 2 de cette Partie D, la suite de terme général U_n est divergente, car ne converge pas vers une limite finie U

5) Dans cette question, on suppose que $ex < 1$.
Soit q un nombre réel tel que $ex < q < 1$.

5a - Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1}(x)/u_n(x) \leq q$.
Soit q un nombre réel tel que $ex < q < 1$.
$u_{n+1}(x)/u_n(x) = ex.f(1/n)$, et $\lim f(1/n) = f(0) = 1$ quand $n \rightarrow +\infty$.
Donc la limite de $u_{n+1}(x)/u_n(x) = ex$, quand $n \rightarrow +\infty$, et $ex < q$.
Alors, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1}(x)/u_n(x) \leq q$.

5b - En déduire alors que, pour tout $n \geq N$, $u_n(x) \leq q^{n-N}\, u_N(x)$.
Pour tout $n \geq N$: $u_{n+1}(x) \leq q.u_n(x)$
On obtient aisément par récurrence : $u_n(x) \leq q^{n-N}\, .u_N(x)$.

5c - Quelle est la nature de la suite $\{U_n(x)\}$?
$U_n(x) = \Sigma_{k=1à+n}\, u_k(x) = \Sigma_{k=1à(N-1)}\, u_k(x) + \Sigma_{k=Nàn}\, u_k(x) = A(x, N) + \Sigma_{k=Nàn}\, u_k(x)$, en notant $A(x, N) = \Sigma_{k=1à(N-1)}\, u_k(x)$

Par ailleurs, pour $n \geq N$, $u_n(x)$ est > 0, et vérifie que $u_n(x) \leq q^{n-N}.u_N(x)$, avec $0 < q < 1$.
On en déduit que :
$\Sigma_{k=Nàn}\, u_k(x) \leq u_N(x).\ \Sigma_{k=Nàn}\, q^{k-N} = u_N(x).\ [1 - (1 - q)^{n-N+1}]/q$, quantité finie car $0 < q < 1$.

Donc $U_n(x)$ est croissante et majorée par $A(x, N) + u_N(x).\ [1 - (1 - q)^{n-N+1}]/q$.
Elle est donc convergente.

6) On définit les deux suites v_n et w_n, n entier > 0 :

$$v_n = \frac{(\frac{n}{3})^n \sqrt{n}}{n!} \quad \text{et} \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{k}{2})^k \sqrt{k}}{k!}$$

Quelles sont les limites de ces deux suites ?
On remarque que v_n n'est autre que $u_n(1/3)$.
Comme e.1/3 est < 1, la suite $V_n = \Sigma v_k$ est convergente (question 5, Partie D).
Et donc $\lim v_n = 0$ (question 1, Partie D).

De même, $w_n = \Sigma_{k=1àn}\, u_k(1/2)$
$e/2 > 1$, et donc d'après la question 4 de cette même partie, la suite $\Sigma_{k=1àn}\, u_k(1/2)$ est divergente, et à termes positifs ; w_n ne converge pas et sa limite est $+\infty$.

7) On définit la suite $u_n(\frac{1}{e})$.

7a – Donner l'expression de $u_n(\frac{1}{e})$.

$u_n(1/e) = (n/e)^n.n^{1/2} / n!$

7b – Pour tout entier $k \geq 1$, calculer le rapport $R(k, e) = u_{k+1}(\frac{1}{e}) / u_k(\frac{1}{e})$.

$u_{k+1}(1/e)/u_k(1/e) = e.1/e.f(1/k) = f(1/k) \geq 1$.

7c – Montrer, en utilisant la question 5 de la partie C, que Ln R(k, e) est majoré par $M(k) = \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{6k^3}$

En passant par les logarithmes népériens :

$\text{Ln } u_{k+1}(1/e) - \text{Ln } u_k(1/e) = \text{Ln } f(1/k) \leq (1/k^2)/12 + (1/k)^3/6$, d'après la question 5 de la Partie C.

$\text{Ln } u_{k+1}(1/e) - \text{Ln } u_k(1/e) \leq 1/12k^2 + 1/6k^3$

7d – En déduire que, pour n entier > 1 :

$$\text{Ln}[u_n(\tfrac{1}{e})] \leq -1 + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} M(k)$$

En sommant l'inégalité de la question précédente pour k allant de 1 à n-1, on obtient :

$\Sigma_{k=1 \text{ à } n-1} [\text{Ln } u_{k+1}(1/e) - \text{Ln } u_k(1/e)] \leq \Sigma_{k=1 \text{à} n-1} (1/12k^2 + 1/6k^3)$

Soit :

$[\text{Ln } u_n(1/e) - \text{Ln } u_1(1/e)] \leq \Sigma_{k=1 \text{à} n-1} (1/12k^2 + 1/6k^3)$

Or $u_1(1/e) = 1/e$, donc $\text{Ln } u_1(1/e) = -1$, et il s'en suit :

$\text{Ln } u_n(1/e) \leq -1 + \Sigma_{k=1 \text{à} n-1} (1/12k^2 + 1/6k^3)$, pour n > 1

7e – Montrer que la suite $u_n(\frac{1}{e})$ est majorée.

Selon les règles classiques, les suites $(1/k^2)$ et $(1/k^3)$ convergent (décroissantes et minorées par 0).

Notons D et T leurs limites respectives (inutile de chercher à les calculer).

On obtient : $\text{Ln } u_n(1/e) \leq -1 + D/12 + T/6$

$u_n(1/e) \leq \exp[-1 + D/12 + T/6]$, donc $u_n(1/e)$ est une suite majorée (et croissante).

8) Soit la suite $z_n = \frac{(\frac{n}{e})^n}{n!}$, n entier > 0.

8a – Donner une relation entre z_n et $u_n(\frac{1}{e})$.

De façon immédiate : $z_n = n^{-1/2}.u_n(1/e)$.

8b – Quelle est la limite de la suite z_n quand n tend vers $+\infty$?

Comme $u_n(1/e)$ est une suite à termes positifs, croissante et majorée, elle converge vers une limite réelle notée u.

Or $n^{-1/2}$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, et donc le produit $n^{-1/2}.u_n(1/e) = z_n$ tend vers 0.