

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte un seul problème, composé de quatre parties non indépendantes notées de A à D.

Problème

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien de base e , $e = 2,718$.

Partie A

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x , strictement positive, définie par :

$$h(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) - \text{Ln } x$$

Etudier très précisément les variations de h .

On étudiera en particulier le signe et les variations de h' et h'' pour établir le tableau complet des variations de h ; on n'oubliera pas les points caractéristiques, leurs tangentes, les limites et les asymptotes éventuelles de h , etc.



Partie B

1) Soient les deux fonctions $a(t)$ et $b(t)$ de la variable réelle t , $t \in J =]-1, +\infty[$, définies par :

$$a(t) = \frac{1}{t+1} \quad \text{et} \quad b(t) = \text{Ln}(1 + t)$$

Donner les développements limités à l'ordre 3 de $a(t)$ et $b(t)$ au voisinage de 0.

2) Montrer que $b(t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$, pour $t \in J$.

3) On considère la fonction numérique f de la variable réelle $t \in J =]-1, +\infty[$, définie par :

$$f(t) = \frac{(1+t)^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{t}\right)}}{e} \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

3a - Quel est le signe de f ?

3b - Montrer que f est continue en 0.

4) Calculer $f'(t)$. Montrer que f est dérivable en 0.

Partie C

1) On considère la fonction numérique g de la variable réelle $t, t \in J =]-1, +\infty[$, définie par :

$$g(t) = \frac{1+t - \frac{1}{1+t}}{2} - \ln(1+t)$$

Etablir un lien entre g et h (h introduite à la Partie A).

2) Montrer que la dérivée $f'(t)$ peut être mise sous la forme $\frac{f(t) \cdot g(t)}{t^2}$, pour $t \neq 0$.

3) Démontrer que f' est continue pour tout $t \in J$.

4) A partir des tableaux de variations de g et f , montrer que $f(t) \geq 1$ pour tout $t \in J$.

5) Montrer que $\ln f(t) \leq \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6}$ pour $t \in J$.



Partie D

Soit une suite $\{u_n\}$, à termes positifs, n entier > 0 ; on définit la suite $\{U_n\}$ par :

$$U_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

1) Montrer qu'une condition nécessaire pour que la suite $\{U_n\}$ admette une limite finie U est que $u_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

2) Que peut-on dire du comportement de la suite $\{U_n\}$ si u_n ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$?

3) Pour x réel > 0 , n entier > 0 , on définit la suite de fonctions $\{u_n(x)\}$ de terme général :

$$u_n(x) = \frac{(nx)^n \sqrt{n}}{n!}$$

Montrer que, pour $x > 0$, le ratio $u_{n+1}(x)/u_n(x)$ est égal à e.x.f($\frac{1}{n}$) où f a été définie en B3.

4) Dans cette question, on suppose que $x \geq \frac{1}{e}$

4a – Montrer que la suite de terme général $\{u_n(x)\}$, n entier > 0 , est une suite croissante.

4b - En déduire alors la nature de la suite associée $\{U_n(x)\}$ où $U_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$.

5) Dans cette question, on suppose que $ex < 1$.

Soit q un nombre réel tel que $ex < q < 1$.

5a - Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1}(x)/u_n(x) \leq q$.

5b - En déduire alors que, pour tout $n \geq N$, $u_n(x) \leq q^{n-N} u_N(x)$.

5c - Quelle est la nature de la suite $\{U_n(x)\}$?

6) Pour n entier > 0 , on définit les deux suites (v_n) et (w_n) par :

$$v_n = \frac{(\frac{n}{3})^n \sqrt{n}}{n!} \quad \text{et} \quad w_n = \sum_{k=1}^n \frac{(\frac{k}{2})^k \sqrt{k}}{k!}$$

Quelles sont les limites de ces deux suites ?

7) On étudie la suite $u_n(\frac{1}{e})$.

7a – Donner l'expression de $u_n(\frac{1}{e})$.

7b – Pour tout entier $k \geq 1$, calculer le rapport $R(k, e) = u_{k+1}(\frac{1}{e}) / u_k(\frac{1}{e})$.

7c – Montrer, en utilisant la question 5 de la partie C, que $\ln R(k, e)$ est majoré par

$$M(k) = \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{6k^3}$$

7d – En déduire que, pour n entier > 1 :

$$\ln[u_n(\frac{1}{e})] \leq -1 + \sum_{k=1}^{n-1} M(k)$$

7e – Montrer que la suite $u_n(\frac{1}{e})$ est majorée.

8) Soit la suite $z_n = \frac{(\frac{n}{e})^n}{n!}$, n entier > 0 .

8a – Donner une relation entre z_n et $u_n(\frac{1}{e})$.

8b – Quelle est la limite de la suite z_n quand n tend vers $+\infty$?