ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte un exercice et un problème, indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice

On considère l'ensemble C des nombres complexes.

1) Résoudre dans C l'équation :

$$z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$$

2) Résoudre dans C l'équation :

$$z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1 = 0$$

Indication : on pourra faire intervenir la variable auxiliaire $u = z + \frac{1}{z}$

Problème

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.
On donne les valeurs numériques suivantes :
$e = 2{,}718$; $e^2 = 7{,}39$; $Ln\, 2 = 0{,}69$; $Ln\, 0{,}6 = -0{,}51$; $Ln\, 0{,}7 = -0{,}36$; $Ln\, 0{,}8 = -0{,}22$.

Définition générale
Soit p et q deux nombres entiers, tels que $p \geq 1$ et $q \geq 1$.
On considère la famille $W(p, q)$, paramétrée par p et q, des fonctions $f_{p,q}$ définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_{p,q}(x) = \frac{(Ln\, x)^p}{x^q}$$

Partie A

Dans cette partie, on pose $q = 1$ et on étudie le sous-ensemble de $W(p, 1)$ formé des fonctions $f_{p,1}$ et pour simplifier les notations, on écrira f_p pour $f_{p,1}$.

$$f_p(x) = \frac{(Ln\, x)^p}{x}$$

1) Etudier de façon très précise les variations des fonctions f_1 et f_2 (points caractéristiques, tangentes, limites, concavité, asymptotes éventuelles, etc …).
Tracer les graphes F_1 et F_2 des fonctions f_1 et f_2 dans un repère orthonormé.
2) Soit a un nombre réel, $a > 0$. On appelle A le point de F_2 d'abscisse a.
Donner l'équation de la droite $D(a)$ tangente à F_2 au point A.
Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre a la droite $D(a)$ passe-t-elle par l'origine O ?

3) Calculer l'intégrale $U(p) = \int_1^{e^p} f_p(x)dx$.
Donner la valeur de $U(3)$.
Que vaut la limite de U(p) quand $p \to +\infty$?

Partie B

Dans cette partie, on considère $q = 2$.
On notera par g_p une fonction de $W(p, 2)$: $g_p = f_{p,2}$

$$g_p(x) = \frac{(Ln\, x)^p}{x^2}$$

1) Etudier précisément les variations de g_2 ; donner la forme générale de son graphe.

2) On considère l'intégrale $J(2) = \int_1^{e^2} g_2(x)\,dx$.

Calculer la valeur de $J(2)$.

3) Etudier les variations de g_p et donner la forme générale de son graphe G_p.

4) Soit l'intégrale $J(p) = \int_1^{e^2} g_p(x)\,dx$.

Etablir une relation entre $J(p+1)$ et $J(p)$ de la forme $J(p+1) = h(p).J(p) + k(p)$, où $h(p)$ et $k(p)$ sont des fonctions de p que l'on explicitera.
En déduire les valeurs de $J(2)$, $J(3)$ et $J(4)$.

Partie C

Soit Δ la droite d'équation $y = x/e^2$ et P la parabole d'équation $y = x^2$.

1) Etudier l'existence de point(s) d'intersection de Δ et de F_2.
Donner leur valeur exacte ou, sinon, un encadrement à 0,1 près.

2) Etudier les points d'intersection de P et de G_2, graphe de g_2 En donner un encadrement à 0,1 près.

Partie D

On veut étudier les variations de la fonction générale $f_{p,q}$.

1) Calculer la dérivée première de $f_{p,q}$, et étudier son signe.

2) Quelles sont les limites de $f_{p,q}$ quand $x \to 0$ et $x \to +\infty$?

3) En déduire les variations de $f_{p,q}$.

4) Calculer la dérivée seconde de $f_{p,q}$ et déterminer le nombre de points d'inflexion du graphe de $f_{p,q}$.

5) Soit $p > 1$ et $q > 1$. On considère l'intégrale $A(p, q) = \int_1^{+\infty} f_{p,q}(x)dx$
Etablir une relation de récurrence de la forme $A(p, q) = u(p, q) + v(p, q).A(p-1, q)$, où $u(p, q)$ et $v(p, q)$ sont des fonctions de p et q que l'on explicitera.

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

On considère l'ensemble *C* des nombres complexes.

1) Résoudre dans *C* l'équation :

$$z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$$

$\Delta = (1 - \sqrt{2})^2$
Deux racines réelles :
$z(1) = 1$
$z(2) = \sqrt{2}$

2) Résoudre dans *C* l'équation :

$$z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1 = 0$$

Indication : on pourra faire intervenir la variable $u = z + \frac{1}{z}$

L'équation proposée peut s'écrire sous la forme

$u^2 - (1 + \sqrt{2})u + \sqrt{2} = 0$, qui admet deux solutions 1 et $\sqrt{2}$.

Les racines en z vérifient donc :

$z + \frac{1}{z} = 1$ ou $z^2 - z + 1 = 0$

$z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$ ou $z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0$

$z^2 - z + 1 = 0$ conduit à $z(1)$ et $z(2) = 1 \pm i\sqrt{3}/2$

$z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0$ conduit à $z(3) = (1 + i)/\sqrt{2}$ et $z(4) = (1 - i)/\sqrt{2}$

Problème

Le symbole *Ln* désigne le logarithme népérien.
On donne les valeurs numériques suivantes :
$e = 2{,}718$; $e^2 = 7{,}39$; $Ln\, 2 = 0{,}69$; $Ln 0{,}6 = -0{,}51$; $Ln 0{,}7 = -0{,}36$; $Ln 0{,}8 = -0{,}22$.

Définition générale

Soit p et q deux nombres entiers, tels que $p \geq 1$ et $q \geq 1$.
On considère la famille $W(p, q)$, paramétrée par p et q, des fonctions $f_{p,q}$ définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_{p,q}(x) = \frac{(Ln\, x)^p}{x^q}$$

Partie A

Dans cette partie, on pose $q = 1$ et on étudie le sous-ensemble de $W(p, 1)$ formé des fonctions $f_{p,1}$: pour simplifier les notations, on écrira f_p pour $f_{p,1}$.

1) Etudier de façon très précise les variations des fonctions f_1 et f_2 (points caractéristiques, tangentes, limites, concavité, asymptotes éventuelles, etc …).
Tracer les graphes F_1 et F_2 des fonctions f_1 et f_2 dans un repère orthonormé usuel.

Etude de f_1 :
$f_1(x) = Lnx/x$
$x > 0$
$f'_1(x) = (1 - Lnx)/x^2$ a le signe de $(1 - Lnx)$, nulle pour $x = e$, > 0 pour $x < e$ et < 0 pour $x > e$.

Dérivée seconde :
$f''_1(x) = x(2lnx - 3)/x^4$
S'annule en $x_0 = e^{3/2} \sim 4{,}5$
En ce point d'abscisse x_0, $f_1(x_0) \sim 0{,}33$.
→ Point d'inflexion (4,5 ; 0,33)

Asymptotes :
$Lim\ f_1(x) = -\infty$ quand $x \to 0$ (asymptote verticale) et $Lim\ f_1(x) = 0$ quand $x \to +\infty$ (asymptote horizontale).
Pas d'asymptote oblique

Points particuliers :
$f_1(1) = 0$
Pente en (1, 0) : $f'_1(1) = 1$
$f_1(e) = 1/e \sim 0{,}37$.
Pente au point d'inflexion : $f'_1(e^{3/2}) = -0{,}025$

Fonction croissante de 0 à e, passant de $-\infty$ à $1/e$, coupant l'axe des abscisses et point d'abscisse 1 (pente 1), puis décroissante sur $(e, +\infty)$ de $1/e$ à 0.
Changement de concavité en $\mathbf{x_0} = e^{3/2} \sim 4{,}5$

x	0	1	e	$+\infty$
f'_1		+	0	-
f_1	$-\infty$	0	$1/e$	0

Etude de f_2 :

$f_2(x) = (Lnx)^2/x$, $x > 0$

$f'_2(x) = Lnx(2 - Lnx)/x^2$

S'annule en $x = 1$ et en $x = e^2 \sim 7{,}4$

f'_2 est négative sur $(0, 1)$, positive entre 1 et e^2, et à nouveau négative pour $x > e^2$;

Donc f_2 est décroissante sur $(0, 1)$, croissante sur $(1, e^2)$, décroissante sur $(e^2, +\infty)$.

Dérivée seconde :

$f''_2(x) = 2x(1 - 3Lnx + (Lnx)^2)/x^4$

Solutions de $1 - 3Lnx + (Lnx)^2 = u^2 - 3u + 1 = 0$ en posant $u = Lnx$

$\Delta = 5 \to$ il existe deux racines $u(1) = (3 - \sqrt{5})/2 \sim 0{,}38$ et $u(2) = (3 + \sqrt{5})/2 = 2{,}62$

Donc deux racines en x : $x' = e^{u(1)} \sim 1{,}46$ et $x'' = e^{u(2)} \sim 13{,}74$

Asymptotes :

$Lim\ f_2(x) = +\infty$ quand $x \to 0$ (asymptote verticale) et $Lim\ f_2(x) = 0$ quand $x \to +\infty$ (asymptote horizontale).

Pas d'asymptote oblique

Points particuliers :

$f_2(1) = 0$, tangente horizontale

$f_2(e^2) = 0$, tangente horizontale

x	0		1		e^2		$+\infty$
f'_2		-	0	+	0	-	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4/e^2$	$\searrow$	0

2) Soit a un nombre réel, $a > 0$. On appelle A le point de F_2 d'abscisse a.

Donner l'équation de la droite $D(a)$ tangente à F_2 au point A.

Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre a la droite $D(a)$ passe-t-elle par l'origine O ?

Tangente à F_2 au point A $(a, f_2(a))$: $(y - f_2(a))/(x - a) = f'_2(a)$

$y = x\ Lna(2 - Lna)/a^2 + 2lna(Lna - 1)/a$

$D(a)$ passe par l'origine si et seulement si $2lna(Lna - 1) = 0$, soit pour $a = 1$ et $a = e$.

Pour $a = 1$, $y = 0$ (tangente horizontale)

Pour $a = e$, $y = x/e^2$

3) Calculer l'intégrale $U(p) = \int_1^{e^p} f_p(x)dx$.

Donner la valeur de $U(3)$.

Que vaut la limite de $U(p)$ quand $p \to +\infty$?

$U(3) = \int_1^{e^3} f_3(x)dx = \int_1^{e^3} \frac{(Ln\,x)^3}{x} dx$

On pose $u = Lnx$: u varie de 0 à 3 et $du = dx/x$

$U(3) = \int_0^3 u^3 du = (3^4/4) = 81/4$

De même, on trouve aisément que $U(p) = p^{p+1}/(p+1)$

Quand $p \to +\infty$, $U(p) \to +\infty$.

Partie B

Dans cette partie, on considère $q = 2$.
On notera par g_p une fonction de $W(p, 2)$: $g_p = f_{p,2}$

$$g_p(x) = \frac{(Ln\,x)^p}{x^2}$$

1) Etudier précisément les variations de g_2 ; donner la forme générale de son graphe.

On trouve aisément :
$g'_2(x) = 2xLnx(1 - Lnx)/x^4$
$g'_2(x)$ est négatif sur $(0, 1)$ et $(e, +\infty)$, et positif entre 1 et e.
Donc g_2 est décroissante, croissante puis décroissante sur ces mêmes intervalles.

$g''_2(x) = 2(1 - 5Lnx + 3(Lnx)^2)/x^4$

g'_2 s'annule en $x = 1$ et $x = e$.

g''_2 s'annule pour $1 - 5Lnx + 3(Lnx)^2) = 0$; soit avec $u = Lnx$, $3u^2 - 5u + 1 = 0$; $\Delta = 13 \rightarrow$ il existe deux racines $u(1) = (5 - \sqrt{13})/6 \sim 0{,}23$ et $u(2) = (5 + \sqrt{13})/6 = 1{,}43$, auxquelles sont associées les valeurs $x(1) \sim 1{,}26$ et $x(2) \sim 4{,}18$.

Asymptotes :
$Lim\ g_2(x) = +\infty$ quand $x \rightarrow 0$ et $Lim\ g_2(x) = 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.
Pas d'asymptote.
$g_2(1) = 0$
$g_2(e) = 1/e^2$

Tableau de variations

x	0		1		e		$+\infty$
f'_2		-	0	+	0	-	
f_1	$+\infty$	↘	0	↗	$1/e^2$	↘	0

2) On considère l'intégrale $J(2) = \int_1^{e^2} g_2(x)dx$.
Calculer la valeur de $J(2)$.

On pose $u = Lnx$, u varie de 0 à 2 quand x varie de 1 à e^2.
$J(2) = \int_1^{e^2} g_2(x)dx = \int_0^2 u^2 e^{-u} du$

En faisant une intégration par parties :

$J(2) = [-u^2e^{-u}]_0^2 + 2\int_0^2 ue^{-u}du$ = - 4e^{-2} + $2\int_0^2 ue^{-u}du$
$\int_0^2 ue^{-u}du$ =$[-ue^{-u}]_0^2 + \int_0^2 e^{-u}du$ = -2e^{-2} + (1 – e^{-2})

D'où le résultat : $J(2)$ = - 4e^{-2} + 2[-2e^{-2} + (1 – e^{-2})] = 2 – 10/e^2

3) Etudier les variations de g_p et donner la forme générale de son graphe G_p.

$g'_p(x) = x(Lnx)^{p-1}(p – 2Lnx)/x^4$
S'annule pour x = 1 et $x = e^{p/2}$
Il faut donc distinguer selon la parité de p :

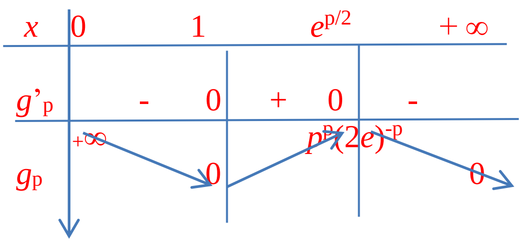
a) Si p est pair, p-1 est impair et $(Lnx)^{p-1}$ est négatif pour $x < 1$
b) Si p est impair, p-1 est pair, et $(Lnx)^{p-1} > 0$ pour $x < 1$

$g''_p(x) = (Lnx)^{p-1}[p(p-1) – 5pLnx + 6(Lnx)^2]/x^4$
S'annule pour x = 1 et si $6u^2 - 5pu + p(p-1) = 0$ avec $u = Lnx$
$\Delta = p(p+24) > 0$ donc il existe deux racines $[5p \pm \sqrt{p(p+24)}]/12$.

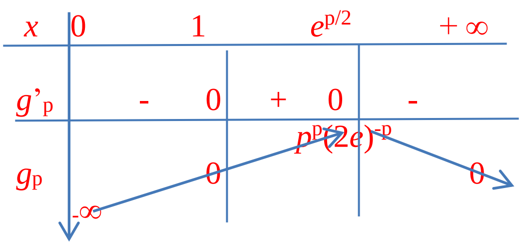
$g_p(1) = 0$
$g_p(e^{p/2}) = \frac{p^p}{(2e)^p}$

Limites :
Si p est pair, $Lim\ g_p(x) = +\infty$ quand $x \to 0$ et $Lim\ g_p(x) = 0$ quand $x \to +\infty$.
Si p est impair, $Lim\ g_p(x) = -\infty$ quand $x \to 0$ et $Lim\ g_p(x) = 0$ quand $x \to +\infty$.
Pas d'asymptote.

***p* pair**



***p* impair**



4) Soit l'intégrale $J(p) = \int_1^{e^2} g_p(x)dx$.
Etablir une relation entre $J(p+1)$ et $J(p)$ de la forme $J(p+1) = h(p).J(p) + k(p)$, où $h(p)$ et $k(p)$ sont des fonctions de p que l'on explicitera.
En déduire les valeurs de $J(2)$, $J(3)$ et $J(4)$.

Faisons le changement de variable $u = Lnx$

Pour $p > 1$: $J(p) = \int_1^{e^2} g_p(x)dx = \int_0^2 u^p e^{-u}du$
$= [-u^p e^{-u}]_{(0,2)} + p\int_0^2 u^{p-1}e^{-u}du$
D'où la relation : $J(p) = pJ(p-1) - 2^p/e^2$

→ $h(p) = p$ et $k(p) = - 2^p/e^2$

$J(1) = \int_1^{e^3} \frac{Lnx}{x^2}dx = \int_0^2 ue^{-u}du = 1 - 3/e^2$

$J(2) = 2J(1) - 4/e^2 = 2 - 10/e^2$
(on retrouve bien $J(2)$ de la question $B2$)
$J(3) = 3J(2) - 8/e^2 = 6 - 38/e^2$

$J(4) = 4J(3) - 16/e^2 = 24 - 168/e^2$

Partie C

Soit Δ la droite d'équation $y = x/e^2$ et P la parabole d'équation $y = x^2$.
1) Etudier l'existence de point(s) d'intersection de D et de F_2.
Donner leur valeur exacte ou, sinon, un encadrement à 0,1 près.

$y = (Lnx)^2/x$
$y = x/e^2$
Soit $z = (Lnx)^2/x - x/e^2 = (e^2(Lnx)^2 - x^2)/xe^2 = (eLnx - x)(eLnx + x)/xe^2$
$a(x) = eLnx + x$
$b(x) = eLnx - x$
On montre facilement que b est toujours négative (max = 0, atteint en $x = e$), et que a est croissante de -∞ à +∞.
$a(x) = 0$ a donc une solution r telle que $eLnr = r$.
$a(1) = 1$
$a(1/2) = -1,38$
$a(0,6) = -0,79$
$a(0,7) = -0,26$
$a(0,8) = 0,19$
→ r est donc compris entre 0,7 et 0,8.

2) Etudier les points d'intersection de P et de G_2, graphe de g_2. En donner un encadrement à 0,1 près.

De façon analogue, $z = ((Lnx)^2/x^2 - x^2) = a(x).b(x)/x^4$
avec $a(x) = Lnx - x^2$ et $b(x) = Lnx + x^2$
$a'(x) = (1 - 2x^2)/x$, positive sur $(0, \sqrt{2}/2)$, négative ensuite.
$a(x)$Δ est donc croissante sur $(0, \sqrt{2}/2)$, allant de -∞ à un maximum m, décroissante sur $(\sqrt{2}/2, +\infty)$.

Sa valeur maximale $m = (Ln2)^2/2 - 4 \sim -3{,}76, < 0$
Donc $a(x)\Delta$ a un signe constant, négatif, et ne change pas de signe (pas de racine).

Inversement, $b'(x) = (1 + 2x^2)/x$, positive.
$b(x)\Delta$ est donc croissante sur $(0, +\infty)$ allant de $-\infty$ à $+\infty$. Elle admet donc une racine s, telle que $Lns + s^2 = 0$.
s est donc l'abscisse du point d'intersection unique de P et de G_2.

$Ln1 + 1 = 1 > 0$
$Ln0{,}5 + 0{,}25 = -0{,}44 < 0$
$Ln0{,}6 + 0{,}36 = -0{,}15$
$Ln0{,}7 + 0{,}49 = 0{,}13$

→ s est entre 0,6 et 0,7

Partie D

Dans cette partie, p et q sont des entiers supérieurs ou égaux à 1.
On veut étudier les variations de la fonction générale $f_{p,q}$.

1) Calculer la dérivée première de $f_{p,q}$, et étudier son signe.

$f'_{p,q}(x) = (Lnx)^{p-1}(p - qLnx)/x^{q+1}$
S'annule pour $x = 1$ et $x = e^{p/q}$
Son signe dépend de la parité de p : en effet, pour $x < 1$:
→ si p est pair, p-1 est impair et $(Lnx)^{p-1} < 0$
→ si p est impair, p-1 est pair et $(Lnx)^{p-1} > 0$

Le signe de la dérivée est donc :
Cas 1 : p pair

x	0		1		$e^{p/q}$		$+\infty$
$(Lnx)^{p-1}$		-	0	+		+	
$p - qLnx$		+		+	0	-	
$f'_{p,q}(x)$		-	0	+	0	-	

Cas 2 : p impair

x	0		1		$e^{p/q}$		$+\infty$
$(Lnx)^{p-1}$		+	0	+		+	
$p - qLnx$		+		+	0	-	
$f'_{p,q}(x)$		+	0	+	0	-	

2) Calculer la dérivée seconde de $f_{p,q}$ et déterminer les points d'inflexion du graphe de $f_{p,q}$.

Après calculs, on établit :
$f''_{p,q}(x) = (Lnx)^{p-2}(p(p-1) - p(2q+1)Lnx + q(q+1)(Lnx)^2)/x^{q+2}$

Remarque : on retrouve la cohérence avec les résultats des questions *A*1, *B*1, *B*3.

$f''_{p,q}(x)$ s'annule pour $x = 1$ et pour les solutions de l'équation $p(p-1) - p(2q+1)Lnx + q(q+1)(Lnx)^2 = 0$
Soit l'équation : $q(q+1)u^2 - p(2q+1)u + p(p-1) = 0$
$\Delta = p^2 + 4pq(q+1) > 0$
Donc il y a deux solutions s_1 et s_2 et donc deux points d'inflexion e^{s1} et e^{s2}.

3) Quelles sont les limites de $f_{p,q}$ quand $x \to 0$ et $x \to +\infty$?

Quand $x \to +\infty$, $f_{p,q}(x) \to 0$
Quand $x \to 0$:

a) Si p est pair, $lim\ f_{p,q}(x) = +\infty$
b) Si p est impair, $lim\ f_{p,q}(x) = -\infty$

4) En déduire les variations de $f_{p,q}$.

On en déduit :

Cas 1 : p pair

x	0		1		$e^{p/q}$		$+\infty$
$f'_{p,q}(x)$	||	-	0	+	0	-	
$f_{p,q}(x)$	|| $+\infty$	↘	0	↗	M	↘	0

Cas 2 : p impair

x	0		1		$e^{p/q}$		$+\infty$
$f'_{p,q}$	||	+	0	+		-	
$f_{p,q}$	|| $-\infty$	↗	0	↗	M	↘	0

La valeur maximum est $M = f_{p,q}(e^{p/q}) = (p/q)^p/e^p = p^p(qe)^{-p}$

5) Soit $p > 1$ et $q > 1$. On considère l'intégrale $A(p, q) = \int_1^{+\infty} f_{p,q}(x)dx$
Etablir une relation de récurrence de la forme $A(p, q) = u(p, q) + v(p, q).A(p-1, q)$, où $u(p, q)$ et $v(p, q)$ sont des fonctions de p et q que l'on explicitera.

En posant $u = (Ln\ x)$ P et en intégrant par parties, on obtient :
$A(p, q) = \frac{p}{q-1} A(p-1, q)$