

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Note : L'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent. La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires demandés explicitement.

Exercice n° 1

Le service financier d'une société d'investissement étudie la rentabilité de son portefeuille d'actions acquises en 1999 et composé en actions A et en actions B. Les dividendes perçus au titre des exercices 1999 à 2005 sont réévalués à l'aide d'un indice d'inflation des prix du Produit Intérieur Brut. Le directeur décide en outre de ne pas tenir compte des plus-values sur valeur de revente de ces deux titres. Les rentabilités pour 100 euros investis initialement dans chaque titre, sont données dans les premières colonnes du tableau ci-dessous.

Dans tout l'exercice, les résultats seront donnés avec une précision de 10^{-3} .

Tableau

Calcul de la variance du portefeuille d'actions constitué par 50% d'actions A et 50% d'actions B

I	Année	Dividendes versés pour 100 euros investis		Calculs complémentaires (pour un portefeuille de 200 euros)				
		A x_i	B y_i	$z_i = x_i + y_i$	x_i^2	y_i^2	z_i^2	$x_i y_i$
1	1999	14	11	25	196	121	625	154
2	2000	11	12	23	121	144	529	132
3	2001	15	12	27	225	144	729	180
4	2002	12	9	21	144	81	441	108
5	2003	13	10	23	169	100	529	130
6	2004	10	11	21	100	121	441	110
7	2005	9	12	21	81	144	441	108
Σ	-	84	77	161	1036	855	3735	922

La variable X est définie comme le dividende versé pour 100 euros dans les actions A ;

La variable Y est définie comme le dividende versé pour 100 euros dans les actions B ;

La variable Z est définie comme le dividende versé pour 100 euros dans les actions A et 100 euros dans les actions B.

Question 1

- Calculer $E(X)$ et $V(X)$ (E désignant l'espérance mathématique et V la variance)
- Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$
- Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$

Question 2

- Comparer $E(Z)$ et $E(X) + E(Y)$. Commenter
- Comparer $V(Z)$ et $V(X) + V(Y)$. Commenter

Question 3

- Calculer la Covariance entre X et Y (donner la formule)
- Calculer $A = V(X) + V(Y) + 2 \text{COV}(X, Y)$
- Comparer $V(Z)$ et A
- Calculer le dividende moyen annuel versé entre 1999 et 2005, ainsi que la variance, d'un portefeuille de 100 000 euros constitué de 50% d'actions A et de 50% d'actions B.

Question 4

Plus généralement, on montre que si $Z = aX + bY$, on a :

- $E(Z) = a E(X) + b E(Y)$
- $V(Z) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab \text{COV}(X, Y)$

A l'aide des relations précédentes, vous calculerez le dividende moyen annuel versé entre 1999 et 2005 (ainsi que la variance) d'un portefeuille de 100 000 euros constitué à raison de 30% d'actions A et de 70% d'actions B (au lieu des 50%-50% initialement choisis).

Question 5

Les relations données à la question précédente permettent également de définir la composition du portefeuille de 100 000 euros qui a la variance de Z la plus faible, c'est-à-dire dont le revenu annuel, entre 1999 et 2005, a été le plus régulier.

- Calculer cette répartition (vous pourrez désigner par α la part que représentent les actions A dans le portefeuille et chercher $V(Z)$ en fonction de α)
- Calculer $E(Z)$ pour la répartition obtenue à la question précédente (5a)
- Commenter

Exercice n° 2

Une agence de voyage possède un certain nombre de villages-clubs, chacun d'une capacité de 300 places. Les conditions de réservation sont assez avantageuses pour la clientèle, et c'est d'ailleurs l'un des arguments commerciaux qui doit affronter une forte concurrence sur le marché des villages-clubs. Le taux des défections est loin d'être négligeable, puisqu'il est de l'ordre de 2 %, aussi le potentiel offert est-il mal exploité car, jusqu'à maintenant, les réservations se limitaient à 300 places et aucune liste d'attente efficace n'avait pu être mise en place. Cette agence de voyage étudie la possibilité d'émettre des réservations conditionnelles (RC) pour mieux remplir ses villages-clubs. Ces RC donneront lieu à un dédommagement (égal au double des arrhes) si l'agence ne peut satisfaire le client ayant acheté ce billet RC.

- Donner la loi du nombre de désistements pour un village-club dans le système antérieur (300 réservations, sans émission de RC).
- A partir du tableau ci-après, donner la probabilité qu'il y ait 3 défections, puis celle d'avoir 5 défections ou plus, pour une semaine donnée dans un village-club.
- Si le bénéfice marginal par client est de l'ordre de 300 euros, et si le coût du dédit est de 500 euros, se pose le problème du nombre maximal de billets RC que l'agence accepte d'émettre. Le raisonnement est le suivant. Pour un nombre maximal k de billets RC émis, l'espérance de gain est :

$$\sum_{x=1}^k 300 x P(X = x) + 300 k P(X > k)$$

tandis que l'espérance de perte est : $\sum_{x=1}^k 500 (k - x) P(X = x)$

- Justifier les formules.

b) Il suffit donc de rechercher par tâtonnement, en faisant varier k , pour quelle valeur de k la différence entre l'espérance de gain et l'espérance de perte est la plus forte. Pour déterminer ce nombre optimal de réservations conditionnelles, on s'aidera du tableau ci-dessous :

Tableau

X	$P(X = x)$	$x P(X = x)$	$\sum_{y=1}^x y P(X=y)$	$P(X > x)$
0	0,0023	0,0000	0,0000	0,9977
1	0,0143	0,0143	0,0143	0,9834
2	0,0436	0,0872	0,1015	0,9398
3	0,0883	0,2649	0,3664	0,8515
4	0,1338	0,5352	0,9016	0,7177
5	0,1617	0,8085	1,7101	0,5560
6	0,1623	0,9738	2,6839	0,3937
7	0,1391	0,9737	3,6576	0,2546
8	0,1040	0,8320	4,4896	0,1506