CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE – AVRIL 1998

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1

1) $\int_0^1 (1+x)^n \, dx = \int_1^2 u^n \, du$ en posant $u = 1+x$

$$= \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_1^2 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

2) $\int_0^1 (1+x)^n \, dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right) dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{k+1}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Exercice 2 :

$$f_t(x) = \frac{t+1}{x^2+t}$$

$x \in \mathbb{R}$, $t > 0 \Rightarrow$ dénominateur toujours > 0

1) $f_t'(x) = \frac{(x^2+t) - (t+1)}{(x^2+t)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+t)^2}$

1^{er} cas : $|x| > 1$

t	0		$+\infty$
$f_t'(x)$		$+$	
$f_t(x)$	$\frac{1}{x^2}$	$\nearrow$	1

2^e cas : $|x| < 1$

t	0		$+\infty$
$f_t'(x)$		$-$	
$f_t(x)$	$\frac{1}{x^2}$	$\searrow$	1

3ᵉ cas :

$|x| = 1 \Rightarrow f_1(x) = 1$

D'où :

Minimum : $m(x) = \frac{1}{x^2}$ si $|x| > 1$

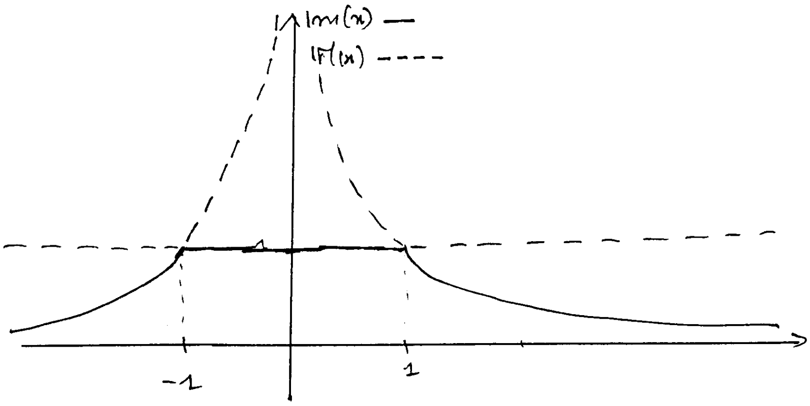
$m(x) = 1$ si $|x| = 1$

$m(x) = 1$ si $|x| < 1$

Maximum : $M(x) = 1$ si $|x| > 1$

$M(x) = \frac{1}{x^2}$ si $|x| < 1$

$M(x) = 1$ si $|x| = 1$



Problème :

$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$ $x \geq 0$

1) $f'(x) = \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(1-x)+1}{(e^x+1)^2}$

2) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x-1) - 1 = 0$

$h(x) = e^x(x-1) - 1$

$h'(x) = xe^x$

x	0	1	α	$+\infty$
h'			$+$	
h	-2 ↗	-1 ↗	0 ↗	$+\infty$

h varie continûment en croissant de -2 à $+\infty$ qd x varie de 0 à $+\infty$ $\Rightarrow \exists\ \alpha \ / \ h(\alpha)=0 = f'(\alpha)$

3) α vérifie : $e^{\alpha}(\alpha-1)-1=0$

et $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{e^{\alpha}+1}$

$$e^{\alpha}=\frac{\alpha}{f(\alpha)}-1$$

$$(\alpha-f(\alpha))(\alpha-1)-f(\alpha)=0$$

$$\alpha^2-\alpha-\alpha f(\alpha)+f(\alpha)-f(\alpha)=0$$

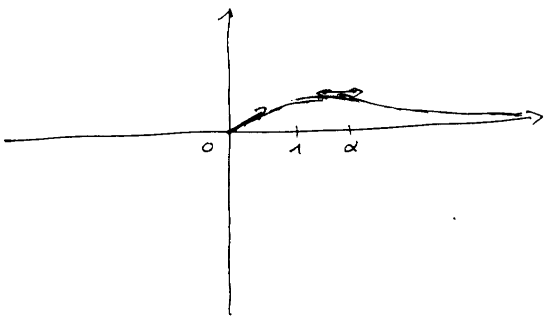
$$\alpha-1-f(\alpha)=0$$

$$\Rightarrow f(\alpha)=\alpha-1$$

4)

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	[redacted]	
$f(x)$	0	↗	$\alpha-1$	↘	0

$f'(0)=\frac{1}{2}$



5) $g(x) = 1 + e^{-x}$

$g(\alpha) = 1 + e^{-\alpha} = \alpha \Rightarrow \frac{1}{e^{\alpha}} = \alpha - 1 \Rightarrow e^{\alpha}(\alpha - 1) - 1 = 0$

$\downarrow$

(équation vérifiée) par α (Q 2)

Est-ce l'unique ?

$u(x) = g(x) - x = 1 + e^{-x} - x$

$u'(x) = -e^{-x} - 1 = -\frac{1}{e^{x}} - 1 < 0$

x	0	1	α	$+\infty$
$u'(x)$		$-$		
$u(x)$	2	$1/e$	0	$-\infty$

$\exists$ 1 et 1 seule valeur x_0 telle que $u(x_0) = g(x_0) - x_0 = 0$

$\Rightarrow x_0 = \alpha$.

$u(1) = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow \alpha > 1$

- $g(\alpha) = \alpha \Rightarrow 1 + e^{-\alpha} = \alpha$

$\Leftrightarrow e^{-\alpha} = \alpha - 1$

Comme $\alpha > 1$, $e^{-\alpha} < e^{-1} \Rightarrow \alpha - 1 < e^{-1}$

6) $g'(x) = -e^{-x}$

x	0	1	α	$+\infty$
g'		$-$		
g	2	$1+\frac{1}{e}$	α	1

Il est trivial que $g(x) \geq 1$

$\forall x \geq 1 \quad g(x) - g(\alpha) = (x - \alpha)\, g'(c) \quad c > 1$

$|g(x) - g(\alpha)| = |x - \alpha| \underbrace{|g'(c)|}_{\text{majoré par } |g'(1)| = e^{-1}}$

7) En utilisant la réponse à la question 6

$$\underbrace{|g(\alpha_0) - \alpha|}_{= |\alpha_1 - \alpha|} \leq e^{-1} |\alpha_0 - \alpha|$$

$$|\alpha_2 - \alpha| \leq e^{-1} |\alpha_1 - \alpha|$$

$$\vdots$$

$$|\alpha_n - \alpha| \leq e^{-1} |\alpha_{n-1} - \alpha|$$

$|\alpha_n - \alpha| \leq (e^{-1})^n \underbrace{|1 - \alpha|}_{< e^{-1}}$ car $\alpha_0 = 1$

$< e^{-1}$ d'après la Q.5

$$\Rightarrow |\alpha_n - \alpha| \leq e^{-(n+1)}$$