ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

L'épreuve se compose de deux exercices et un problème ; le candidat peut les traiter dans un ordre quelconque.

EXERCICE n° 1

Pour tout entier n $\in$ N, on définit l'intégrale S(n) par :

$S(n) = \int_0^1 (1+x)^n \, dx$

❶ Calculer S(n)

❷ En déduire $\sum_{k=0}^{n} C_n^k / (k+1)$

EXERCICE n° 2

Pour t réel strictement positif, on définit la fonction f_t de la variable réelle x dépendant du paramètre t de la façon suivante :

$$f_t : x \rightarrow (t + 1) / (x^2 + t).$$

❶ Déterminer, quand ils existent, les réels M(x) et m(x) définis par :

$M(x) = \text{Max}_{\,t > 0}\, f_t(x)$

$m(x) = \min_{\,t > 0}\, f_t(x)$

M(x) (resp. m(x)) est le maximum (resp. minimum) de la fonction $f_t(x)$ lorsque t parcourt $R^+ - \{0\}$.

❷ Représenter les graphes des fonctions M et m.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur R^+ par :

$$f(x) = x / (e^x + 1) \qquad (x \geq 0)$$

❶ Calculer la dérivée f ’de f.

❷ Montrer que l’équation f ’(x) = 0 admet une solution et une seule sur R^+ ; on notera par α cette solution.

❸ Montrer que α vérifie l’équation : $f(\alpha) = \alpha - 1$.

❹ Construire le tableau de variation de f et donner l’allure du graphe de cette fonction.

❺ On introduit la fonction g définie sur R^+ par la relation :

$$g(x) = 1 + e^{-x}$$

Montrer que α est l’unique solution de l’équation g(x) = x.

Etablir que $\alpha > 1$. En déduire que $\alpha - 1 < e^{-1}$.

❻ Montrer que, pour tout nombre réel $x \geq 1$, on a :

$$g(x) \geq 1$$

et que :

$$|g(x) - \alpha| \leq e^{-1}|x - \alpha|$$

❼ On définit la suite (α_n), $n \in \mathbb{N}$, d'éléments de $[1, +\infty[$ par la relation de récurrence d'ordre 1 :

$$\alpha_{n+1} = g(\alpha_n)$$

avec la condition initiale $\alpha_0 = 1$.

Montrer que, pour tout entier n, on a :

$$|\alpha_n - \alpha| \leq e^{-(n+1)}$$