CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

* *

PROBLEME n° 1

(R) $P(x)\,P(x+2)+P(x^2)=0$

❶ $Q(x)=P(x^2)+P(x)\,P(x+2)$

Soit P de degré n, $a_n x^n$ sont terme du plus haut degré.

Le terme du plus haut degré de Q est $a_n x^{2n}+a_n^2 x^{2n}$

$\Rightarrow$ il est de degré $2n$ si $a_n \neq -1$

❷ $P(a)=0$

$$\underbrace{P(a)P(a+2)}_{=0}+P(a^2)=0$$

$\Rightarrow P(a^2)=0$ $\qquad$ a^2 est racine

De même :

$$P(a^2)P(a^2+2)+P(a^4)=0$$

$\Rightarrow P(a^4)=0$ $\qquad$ a^4 est racine

❸ Plus généralement, $(a^2)^k$, $k\in\mathbb{N}$, est racine de P.

Si $a=1$ ou $a=0$, toutes ces quantités sont égales (à 1 ou 0) :

- a = 1 $\Rightarrow$ 1 seule racine (1)
- a = 0 $\Rightarrow$ 1 seule racine (0)
- a = 1 $\Rightarrow$ 2 racines : -1 et 1

On sait, si $|a| \neq 1$ ou 0, il existe une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.

❹ $P(a-2)\underbrace{P(a)}_{=0}+P\left((a-2)^2\right)=0$

$\Rightarrow P\left((a-2)^2\right)=0$

D'où $(a-2)^2$ est racine de P

et donc : $(a-2)^2=0$ ou $(a-2)^2=1$

$a=2$: impossible ($a=0,1$ ou -1)
$a-2=1 \Rightarrow a=3$ impossible
$a-2=1 \Rightarrow a=1$ = ok

❺ Soit r l'ordre de multiplicité de 1 comme racine de P

$$P(x)=\lambda(x-1)^r$$
$$\lambda^2(x-1)^r+\lambda\left(x^2-1\right)^r=0$$
$$\Rightarrow \quad \lambda^2+\lambda=0$$
$$\Rightarrow \quad \lambda=0 \text{ ou } \lambda=-1$$

$$P(x)=-(x-1)^r \qquad (r \in \mathbb{N}^*)$$

❻ Pas de changement si le corps de base est $\mathbb{C}$, sinon que l'on est certain que a existe.

PROBLEME n° 2

❶ $x \in \left[0, \pi/4\right]$

$f(x)=tgx$ est une bijection $\left[0, o/4\right] \rightarrow [0,1]$

$\Rightarrow \exists f^{-1}=[0,1] \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ fct inverse de f

On la note $f^{-1}=Arctg$

❷ $y = Arctg\, x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$$

$$x = tg\, y \qquad \frac{dx}{dy} = 1 + tg^2 y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$Arctg$ est une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$

$Arctg\, x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ (car $Arctg 0 = 0$)

❸

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i t^{2i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(t^2\right)^i = 1 - t^2 + t^4 + \ldots$$

$$= \text{somme des } (n+1) \text{premiers termes } \sum_{i=0}^{n} \left(-t^2\right)^i$$

$$= \frac{1-\left(--t^2\right)^{n+1}}{1-\left(-t^2\right)} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+t^2} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i t^{2i} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$$

❹ ①

$$Arc\ tg\, x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \underbrace{\int_0^x \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i t^{2i}\right) dt}_{S_{(n)}(x)} + \underbrace{(-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt}_{R_n(x)}$$

. $S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left[\frac{t^{2i+1}}{2_{i+1}}\right]_0^2 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2_{1+1}}$

. $\left|R_n(x)\right| = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$

sur $[0,1]\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$

$\Rightarrow \left|R_n(x)\right| \leq \left[\frac{t^{2n+2}}{2_{n+3}}\right]_0^2 = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$

② $S_n(x) = Arc\ tg - R_n(x)$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = Arc\,tgx$$

③ $S_n(1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{2_{i+1}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

$$\left|Arc\,tg\,1 - S_n(1)\right| = \left|R_n(1)\right| \leq \frac{1}{2_{n+3}}$$

$$\left|\frac{\pi}{4} - S_n(1)\right| \leq \frac{1}{2n+3}$$

$$\left|\pi - 4S_n(1)\right| \leq \frac{4}{2n+3}$$

Si on veut une approximation à 10^{-4}

$$\frac{4}{2n+3} \leq 10^{-4}$$
$$\Rightarrow\ n > 9999$$

❺ $Arc\ tg\frac{1}{b} = \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{dt}{1+t^2}$

$$t = \frac{au-1}{au+u} \Rightarrow at + nt = au - 1\ ;\ \frac{dt}{du} = \frac{1+u^2}{(a+u)^2}$$

$u(a-t) = at + 1$

$u = \frac{at+1}{a-t}$ varie de $\frac{1}{a}$ à 1 (remplacer t par 0 puis t par $\frac{1}{b}$ avec $b = (a+1)/(a-1)$)

$$\int_0^{1/b}\frac{dt}{1+t^2} \qquad = \int_{1/a}^{1}\frac{1}{1+\left(\frac{au-1}{a+u}\right)^2}\frac{a^2+1}{(a+u)^2}du$$

$$= \int_{1/a}^{1}\frac{1+a^2}{(a+u)^2+(a-u)^2}du$$

$$= \int_{1/a}^{1}\frac{1+a^2}{(1+a^2)u^2+(a^2+1)}du$$

$$= \int_{1/a}^{1}\frac{1}{1+u}du = \underbrace{Arc\ tg\ 1}_{\pi/4} - Arc\ tg\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow Arc\ tg\frac{1}{a} + Arc\ tg\frac{1}{b} = \pi/4$$

❻ $a = 2(\Rightarrow b = 3)$

$$\frac{\pi}{4} = Arc\ tg\frac{1}{2} + Arc\ tg\frac{1}{3}$$

$$= S_n\left(\frac{1}{2}\right) + S_n\left(\frac{1}{3}\right) + R_n\left(\frac{1}{2}\right) + R_n\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\left|\pi - 4\left(S_n\left(\frac{1}{2}\right) + S_n\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right| \qquad = 4\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right) + R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$\leq 4\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \left|R_n\left(\frac{1}{3}\right)\right|$$

$$\leq 4\left(\frac{(1/2)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(1/3)^{2n+3}}{2n+3}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2n+3}\left(\frac{4}{2^{2n+1}} + \frac{4}{2^{2n+3}}\right)$$

Pour $n = 8, \frac{1}{2n+3}\left(\frac{4}{2^{2n+1}} + \frac{4}{2^{2n+3}}\right) \approx 4{,}02.10^{-7}$