

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN**

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants.

PROBLEME n° 1

❶ Soit $P(x)$ un polynôme quelconque non nul de la variable réelle x . Etudier le degré du polynôme $Q(x) = P(x) P(x + 2) + P(x^2)$.

❷ On suppose à partir de cette question que le polynôme P vérifie la relation (R):

$$(R) \quad P(x) P(x + 2) + P(x^2) = 0$$

On note par a une racine de P , supposée exister. Démontrer que a^2 et a^4 sont deux racines de P .

❸ En déduire que, si $|a| \neq 1$ et $a \neq 0$, P admet une infinité de racines. Qu'est alors le polynôme P ?

❹ On suppose donc que $|a| = 1$ ou $a = 0$. Démontrer que $(a - 2)^2$ est une racine de P . En déduire que P n'admet qu'une seule racine a et donner sa valeur.

⑤ Donner alors l'expression générale de tous les polynômes $P(x)$ non nuls, de la variable réelle x , à coefficients réels, vérifiant la relation (R).

⑥ Examiner les résultats des questions 2 à 5 dans le cas où la relation (R) est vérifiée par un polynôme non nul quelconque $P(z)$ de la variable complexe z et à coefficients complexes.

PROBLEME n° 2

① On considère la fonction « tangente » $f : x \rightarrow \operatorname{tg} x$ définie pour $x \in [0, \pi/4]$. Montrer rigoureusement que f est inversible ; on note Arctg la fonction f^{-1} .

② Calculer la dérivée de Arctg .

En déduire que $\operatorname{Arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ pour $0 \leq x \leq 1$

③ Montrer que pour tout réel t et tout entier n , on a :

$$(1+t^2)^{-1} = \sum_{i=0}^n (-1)^i t^{2i} + (-1)^{n+1} t^{2n+2}/(1+t^2)$$

④ ① Montrer que $\operatorname{Arctg} x$ peut s'écrire sous la forme :

$$\operatorname{Arctg} x = S_n(x) + R_n(x)$$

où les quantités $S_n(x)$ et $R_n(x)$ vérifient :

- $S_n(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i x^{2i+1}/(2i+1)$
- $R_n(x)$ est tel que $|R_n(x)| \leq x^{2n+3}/(2n+3)$

② En déduire que $\operatorname{Arctg} x = \lim S_n(x)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

③ On prend $x = 1$; établir que $|\pi - 4 S_n(1)| \leq 4/(2n+3)$. Déterminer la valeur de n de façon à avoir une approximation de π à 10^{-4} près.

⑤ On considère deux nombres réels a et b tels que $b = (a + 1)/(a - 1)$; montrer, en faisant le changement de variable $t \rightarrow u$ tel que $t = (au - 1)/(a + u)$ dans l'intégrale de définition de $\text{Arctg}(1/b)$, que l'on a :

$$\text{Arctg}(1/a) + \text{Arctg}(1/b) = \pi/4$$

⑥ On prend $a = 2$; montrer que $\pi/4 = \lim [S_n(1/2) + S_n(1/3)]$ quand $n \rightarrow +\infty$.
Montrer que $|\pi - 4 [S_n(1/2) + S_n(1/3)]| \leq (2^{-(2n+1)} + 4 \times 3^{-(2n+3)})/(2n + 3)$. Quelle précision peut-on avoir pour $n = 8$?