ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

1 – On peut écrire T = a I + R avec R la matrice d'ordre 3 de coefficients r(i, j) dont tous les coefficients sont nuls sauf r(1, 2) = r(2, 3) = b et r(1, 3) = c.

Un calcul simple montre que R^2 est nulle sauf le coefficient (1, 3) égal à b^2 et que $R^k = 0$ pour $k \geq 3$.

2 – En appliquant la formule du binôme à T = aI + R, et en tenant compte de ce qui précède, on obtient :

$T^n = a^n I + n a^{n-1} R + n(n-1) a^{n-2} R^2 / 2$

La matrice T^n appartient à la classe Δ avec comme élément diagonal a^n, élément de type « b » $n a^{n-1} b$, et élément de type « c » $n a^{n-1} c + n(n-1) a^{n-2} b^2 / 2$.

3 a – On a : $AX = X^n.X = X^{n+1} = X.X^n = XA$
Donc X commute avec A.

3 b – Ecrivons de façon générique la matrice X sous la forme :

$$X = \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ G & h & i \end{matrix}$$

Le calcul de XA donne pour éléments :

(1, 1) a
(1, 2) 2a + b
(1, 3) 3a + 2b + c
(2, 1) d
(2, 2) 2d + e
(2, 3) 3d + 2e + f
(3, 1) g
(3, 2) 2g + h
(3, 3) 3g + 2h + i

De même, le calcul de AX conduit à :

(1, 1) a + 2d + 3g
(1, 2) b + 2^e + 3h
(1, 3) c + 2f + 3i
(2, 1) d + 2g
(2, 2) e + 2h
(2, 3) f + 2i
(3, 1) g
(3, 2) h
(3, 3) i

Le fait que AX = XA entraîne que :

g = 0 d'après (3, 2)
h = 0 d'après (3, 3)
h = d = 0 d'après (2, 2)
e = i d'après (2, 3)
a = e d'après (1, 2)
a = e = i et donc b = f d'après (1, 3)

X appartient donc à la classe Δ.

3 c – Soit à résoudre l'équation (E). Compte tenu de la forme particulière de A, on a le système :

$a^n = 1$
$n\, a^{n-1} b = 2$
$n\, a^{n-1} c + n(n-1)\, a^{n-2}\, b^2 / 2 = 3$

Pour n impair, on obtient :

a = 1
b = 2/n
nc + 2(n – 1)/n = 3

Il y a une unique solution pour n impair : T(1, 2/n, (n+2)/n²)

Pour n pair, on trouve le triplet (1, 2/n, (n+2)/n²) ainsi que le triplet opposé (–1, – 2/n, – (n+2)/n²).

EXERCICE n° 2

1 – La somme des équations du système donne a + b + c + d = 0. Cette condition est donc nécessaire pour que le système admette au moins une solution.

Supposons cette solution satisfaite, l'une des équations est la conséquence des autres ; calculons y, z et t en fonction de x.

y = a + 0,75x
z = b + y – 0,25x = a + b + 0,5x
t = 0,25x – d

La condition supplémentaire équivaut alors à 2a + b + d + 2,5x = r.

Il en résulte les expressions suivantes :

x = 2(r – 3a – 2b – c) / 5
y = (3r + a – 6b – 3c) / 10
z = (r + 2a + 3b – c) / 5
t = (r + 7a + 8b + 9c) / 10

2 a – En appliquant la définition de m_n et M_n, on peut écrire pour tout n :
$m_n \leq u_n \leq M_n$, $m_n \leq u_{n+1} \leq M_n$, $m_n \leq u_{n+2} \leq M_n$, $m_n \leq u_{n+3} \leq M_n$; il en résulte que :

$4m_n \leq u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} \leq 4M_n$

ou encore $m_n \leq u_{n+4} \leq M_n$

2 b – Puisque m_n est inférieur à u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, u_{n+4} , il est inférieur au plus petit de quatre et donc $m_n \leq m_{n+1}$, et la suite m_n est croissante.

De même, on a $M_{n+1} \leq M_n$, et la suite M_n est décroissante.

On peut donc écrire pour tout entier n : $m_0 \leq m_n \leq M_n \leq M_0$

Il en résulte que les suites m_n et M_n sont respectivement majorée et minorée : ces deux suites sont donc convergentes et leurs limites m et M vérifient $m \leq M$.

2 c – Parmi les quatre nombres u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, l'un est égal à m_n et les autres sont inférieurs à M_n. Il en résulte $u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} \leq 3M_n + m_n$, ou encore $u_{n+4} \leq 0{,}75M_n + 0{,}25m_n$.

2 d – Par ailleurs, la suite m_n étant croissante de limite m, on a $u_{n+4} \leq 0{,}75M_n + 0{,}25m$.
En remplaçant n par n+1, n+2, n+3, on peut écrire $4u_{n+5} \leq 3M_{n+1} + m$, $4u_{n+6} \leq 3M_{n+2} + m$, $4u_{n+7} \leq 3M_{n+3} + m$. Or la suite M_n est décroissante donc pour k = n+', n+5, n+6, n+7, on a $u_k \leq 0{,}75M_n + 0{,}25m$ et le maximum M_{n+4} de ces nombres vérifie alors est $M_{n+4} \leq 0{,}75M_n + 0{,}25m$.

2 e – Puisque la suite M_n converge vers M, en passant à la limite dans cette inégalité, on a $M \leq m$.
On sait en plus que $m \leq M$, d'où m = M et les deux suites m_n et M_n sont adjacentes.

Pour tout n, l'inégalité $m_n \leq u_n \leq M_n$ prouve que u_n converge vers la limite commune à m_n et M_n.

EXERCICE n° 3

1 – La fonction s est impaire, s(0) = 0.
$s'(x) = (e^x + e^{-x})/2$
La tangente en (0, 0) est la droite d'équation y = x, car s'(0) = 1.
$s''(x) = s(x)$
Comme s est croissante sur R et s(0) = 0, $s(x) \leq 0$ pour tout $x \leq 0$, et $s(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.
Donc s est convexe sur R^-, concave sur R^+.
Il est clair que s(x) tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$: branche parabolique dans la direction de Oy.

2 – Continue et strictement croissante sur R, s est une bijection de R sur R.

Soit a un réel ; s(x) = a est équivalent à $x = \ln(a + (1 + a^2)^{1/2})$

Ainsi, h, inverse de s, est une application de R dans R définie par $h(x) = \ln(x + (1 + x^2)^{1/2})$

3 – Pour tout x réel, $1 + x^2$ est positif strictement et donc $(1 + x^2)^{1/2}$ est dérivable sur R, donc f également comme somme et composée de fonctions dérivables.

Il est facile d'établir que $h'(x) = 1 / (1 + x^2)^{1/2}$