Fomesoutra.com
ça soutra !

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

L'épreuve se compose de trois exercices indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

EXERCICE n° 1

On se place dans l'ensemble $M_3(R)$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera I la matrice unité et O la matrice nulle de $M_3(R)$.

Les paramètres a, b et c sont des nombres réels ; on définit la classe Δ des matrices T(a, b, c) de $M_3(R)$ de la forme :

$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

On note par A la matrice T(1, 2, 3) correspondant aux choix de paramètres a = 1, b = 2, c = 3.

On considère l'équation matricielle (E) : $X^n = A$, où l'inconnue est une matrice X de $M_3(R)$, n étant un nombre entier non nul.

➊ Montrer que T(a, b, c) peut se mettre sous la forme aI + R, où R est une matrice que l'on explicitera.

➋ Donner l'expression de la matrice $T^n(a, b, c)$, pour tout entier n.

➌ On suppose que la matrice X vérifie l'équation (E).

a) Démontrer que X commute avec A : AX = XA.

b) En déduire que X appartient à Δ.

c) Déterminer les éventuelles solutions de (E) en distinguant selon la parité de n.

EXERCICE n° 2

➊ On considère le système linéaire d'inconnues réelles x, y, z, t où a, b, c et d sont des paramètres réels :

$– 0,75x + y = a$
$0,25x – y + z = b$
$0,25x – z + t = c$
$0,25x – t = d$

Donner une condition (C) nécessaire sur les paramètres a, b, c, d pour que ce système admette au moins une solution.

En supposant cette condition (C) vérifiée, montrer que pour tout réel r il existe une unique solution au système précédent vérifiant de plus l'égalité x + y + z + t = r. Préciser cette solution.

➋ On définit la suite réelle (u_n), $n \in \mathbb{N}$, ensemble des nombres entiers naturels, vérifiant pour tout entier n l'égalité :

$u_{n+4} = (u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n)/4$

On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux suites m_n et M_n par :

$m_n = \text{Min}\,(u_n , u_{n+1} , u_{n+2} , u_{n+3})$

$M_n = \text{Max}\,(u_n , u_{n+1} , u_{n+2} , u_{n+3})$

2 a – Etablir pour tout entier naturel n les inégalités : $m_n \leq u_{n+4} \leq M_n$

2 b – En déduire que la suite (m_n) est croissante et que la suite (M_n) est décroissante, puis que ces deux suites sont convergentes. On notera par m et M leurs limites respectives.

2 c – Etablir pour tout entier naturel n l'inégalité :

$$u_{n+4} \leq 0{,}75\, M_n + 0{,}25\, m_n$$

puis l'inégalité :

$$u_{n+4} \leq 0{,}75\, M_n + 0{,}25\, m$$

2 d – En appliquant ce résultat successivement à n, n+1, n+2, n+3, établir pour tout entier naturel n l'inégalité :

$$M_{n+4} \leq 0{,}75\, M_n + 0{,}25\, m$$

2 e – En déduire que les deux suites (m_n) et (M_n) sont adjacentes et que la suite (u_n) converge.

EXERCICE n° 3

❶ On définit la fonction s de R dans R par : $\forall x \in R$, $s(x) = (e^x - e^{-x})/2$.
Faire l'étude complète de la fonction s, tracer très précisément son graphe (on précisera la tangente au point d'abscisse 0, et les intervalles sur lesquels s est convexe ou concave).

❷ Montrer que s est une bijection de R sur R et expliciter son inverse s^{-1}.

❸ Pour alléger les notations, on note $h = s^{-1}$; montrer que h est dérivable sur R et que, pour tout x réel, on a :

$$h'(x) = 1 / (1 + x^2)^{1/2}$$