ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Problème n° 1

1) Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur AB dans le triangle ABC ; $\sin\alpha$ = CH/AC et donc il est évident que la longueur de AD est égale au produit AB.CH, soit 2S où S est la surface du triangle ABC.

2) D'après le résultat de la question 1, écrire que le produit vectoriel de MA et MB est une constante positive a revient à écrire que :

AB.MH = a

Où H est le pied de la projection orthogonale de M sur AB.
C'est-à-dire que la distance MH est égale à la constante a/AB.

L'ensemble des points M recherché est donc l'ensemble des points dont la distance orthogonale à AB est une constante, c'est-à-dire les deux droites parallèles à AB et situées à la distance a/AB de la droite AB.

Problème n° 2

Partie A :

1) Soient P et Q deux polynômes de E(n), a une constante réelle ; il est trivial d'établir que g(aP + Q) = ag(P) + g(Q)

2) Ecrivons le polynôme $P(x) = \Sigma_k a_k x^k$, avec k = 0 à n.

Remarque préliminaire : il est évident que pour n=0 (ensemble des polynômes constants), g(P) = 0.

Considérons donc le cas non trivial (n non nul).

$P' = \Sigma_k ka_k x^{k-1}$ avec k = 1 à n

$P'' = \Sigma_k k(k-1)a_k x^{k-2}$ avec k = 2 à n.

Le coefficient du terme x^n est $n(n-1) a_n + 2n a_n = n(n+1) a_n$ qui est différent de zéro puisque a_n est non nul.

Donc, si degré P = n, alors degré g(P) = n.

3) Soit à déterminer l'ensemble des polynômes P tels que g(P) = O.

D'après la question précédente, pour tout polynôme de degré n (n ≥ 1), g(P) est aussi de degré n ; il ne peut donc être nul.

D'où le noyau de g se réduit à l'ensemble des constantes.

4) La matrice de g dans B est donnée par les coefficients dans B de g(1), g(x), …., $g(x^n)$.

g(1) = 0
g(x) = 1 + 2x
…..
$g(x^k) = k(1-k) x^{k-2} + k x^{k-1} + k(k+1)x^k$

La matrice G est donc :

0 1 -2 0 0 …………………0
0 2 2 0 0 …………………0
0 0 6 0 0 …………………0

…………………k(1-k)….
……………………k…….
………………….k(k+1)

……………………………….n(n+1)

G est une matrice dont le triangle inférieur est nul. Le polynôme caractéristique conduisant aux valeurs propres est donné par :

$D(\lambda) = \Pi_k\,[k(k+1) - \lambda]$ où k varie de 0 à n.
Les n+1 valeurs propres sont donc $\lambda = k(k+1)$, k = 0 à n.

Partie B :

1) Trivial : h(aP + Q) = ah(P) + h(Q)

2) Degré de h(P) : examinons quelques cas particuliers.
Soit P polynôme constant (degré nul) : h(P) est nul.
Soit P de degré 1 : P(x) = a + bx
Alors h(P) = a + b(x+2) – 2a –2b(x+1) + a + bx = 0
Soit P de degré 2 : P(x) = a + bx + cx² ; h(P) = 2c, polynôme constant de degré nul.

Cas général :
$P(x) = \Sigma_k\, a_k\, x^k$, avec k = 0 à n

En développant h(P) et en écrivant les coefficients des termes de puissance n, n-1 et n-2, on constate que le coefficient de x^n est nul, ainsi que celui de x^{n-1}, alors que le coefficient de x^{n-2} est non nul, égal à $n(n-1)\, a_n$.

Conclusion : pour P de degré n ≥ 2, le degré de h(P) est de degré n-2 ; pour n = 1 ou n = 0, h(P) est nul.

3) Compte tenu des résultats de la question précédente, le noyau de h est constitué des polynômes de E(1), c'est-à-dire les polynômes de degré 0 ou 1.

Problème n° 3

Partie A :

Le polynôme $D(\lambda)$ des valeurs propres s'obtient en calculant le déterminant de la matrice $A - \lambda I$, où I est la matrice unité de dimension 4.

Le calcul conduit à :

$D(\lambda) = (\lambda^2-4)(\lambda^2-6)$

Les valeurs propres sont donc 2, -2, $-\sqrt{6}$, $+\sqrt{6}$

Le système vérifié par le vecteur propre (x, y, z, t) associé à la valeur propre λ est :

$4t = \lambda x$; $3z = \lambda t$; $2y = \lambda z$; $x = \lambda t$

$\lambda=2$
Un vecteur propre est (2, 0, 0, 1), ou, normé, $(2/\sqrt{5}, 0, 0, 1/\sqrt{5})$

$\lambda=-2$
Un vecteur propre est (-2, 0, 0, 1), ou, normé, $(-2/\sqrt{5}, 0, 0, 1/\sqrt{5})$

$\lambda=\sqrt{6}$
Un vecteur propre est $(0, \sqrt{6}/2, 1, 0)$, ou, normé, $(0, \sqrt{3}/\sqrt{5}, \sqrt{2}/\sqrt{5}, 0)$

$\lambda=-\sqrt{6}$
Un vecteur propre est $(0, -\sqrt{6}/2, 1, 0)$, ou, normé, $(0, -\sqrt{3}/\sqrt{5}, \sqrt{2}/\sqrt{5}, 0)$

Partie B :

Le polynôme caractéristique est $D(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2-k)$

Cela conduit à quatre situations :

Cas n°1 : $k = 0$
$\lambda = 2$, $\lambda = 0$ (racine double)

Cas n°2 : $k = 4$
$\lambda = 2$ (double), $\lambda = -2$

Cas n°3 : $k < 0$
$\lambda = 2$

Cas n°4 : $k > 0$
$\lambda = 2$, $\lambda = -\sqrt{k}$, $\lambda = \sqrt{k}$