Fomesoutra.com
ça soutra !

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Problème n °1 :

1) Le symbole ln est celui des logarithmes népériens.

Montrer que, $\forall\ x > -1$, $\ln(1 + x) \leq x$

2) Montrer que pour tout entier n strictement positif :

$\forall\ x \in [\ -(n)^{1/2}, n^{1/2}\ ]$ $\qquad (1 - x^2/n)^n \leq e^{-x^2}$

3) Montrer que pour tout entier n strictement positif :

$\forall\ x \in R$ $\qquad e^{-x^2} \leq (1 + x^2/n)^{-n}$

Fomesoutra.com
ça soutra !

Problème n °2 :

M_4 désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre 4 à coefficients réels.

A et B sont deux matrices symétriques de M_4, de coefficients respectifs : pour A, $a_{i,j} = 1$, $\forall i = 1$ à 4, $\forall j = 1$ à 4 ; pour B, $b_{i,i} = 1$ $\forall i = 1$ à 4, $b_{i,i+1} = 0$ $\forall i = 1$ à 3, $b_{i,i+2} = -1$, $\forall i = 1$ à 2, $b_{1,4} = 0$.

1) Calculer A^2, B^2, A^n, B^n, AB et BA.

2) Soit la matrice S = A + B. Donner l'expression de S^n, pour tout entier n strictement positif.

Problème n °3 :

Dans l'espace M_3 des matrices carrées d'ordre 3, on définit la matrice T :

$$T = \begin{pmatrix} 2\cos^2 t & 1 & 1+\cos 4t \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2\sin^2 t \end{pmatrix}$$

où t est un paramètre réel quelconque.

Déterminer les valeurs propres de T et les sous-espaces associés.
La matrice T est - elle diagonalisable ?

Problème n °4 :

Pour tout n entier, on considère l'intégrale U(n) définie par :

$U(n) = \int_{[0,1]} (1 - t^2)^{n/2}\, dt$

Le symbole $\int_{[0,1]}$ signifie que l'intégrale est calculée pour t allant de 0 à 1.

1) Calculer U(0) et U(1).

2) Montrer que, $\forall\ n \in N$, $U(n+1) \leq U(n)$

3) Etablir une relation entre U(n) et U(n – 2).
En déduire la valeur de U(n). (On distinguera n pair et n impair).

Problème n °5 :

Dans ce problème, K représente un entier fixé, strictement supérieur à 1 ; α est un nombre réel appartenant à l'intervalle]0, 1[.

On définit les suites u_n et v_n par les équations de récurrence suivantes :

(I) $\forall\ n \geq 1$, $u_n = \alpha\, u_{n+1} + (1 - \alpha)\, u_{n-1}$

avec $u_0 = 0$ et $u_K = 1$

(II) $\forall\ n \geq 1$, $v_n = \alpha\, v_{n+1} + (1 - \alpha)\, v_{n-1}$

avec $v_0 = 1$ et $v_K = 0$

Donner, selon les valeurs du paramètre α, les expressions de u_n et v_n en fonction de α, n et K.