ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

On définit la suite récurrente (u_n), $n \geq 1$, par :

$u_1 = 0$

$\forall\, n \geq 2 \quad (n + 1)^2 u_n = (n - 1)\, u_{n-1} - n$

1) Calculer u_2 et u_3.

Pour $n = 2$, $9\, u_2 = u_1 - 2 \Rightarrow u_2 = -2/9$

$u_3 = -31/144$

2) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [-1, 0]$.

Raisonnons par récurrence.
La propriété est vraie au rang 1. Supposons-la vraie au rang n.

- $u_{n+1} = [nu_n - (n + 1)]/(n + 2)^2$

$u_n \leq 0 \Rightarrow nu_n - (n + 1) \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} \leq 0$

- $u_n - (-1) = [nu_n - (n+1) + (n+2)^2]/(n+2)^2$

$= [n^2 + n(u_n + 3) + 3]/(n+2)^2$

$u_n \geq -1 \Rightarrow u_n + 3 \geq 2 \Rightarrow n^2 + n(u_n + 3) + 3 \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} \geq -1$

Donc la propriété est vraie au rang n+1.

3) Montrer que la suite (u_n) admet une limite que l'on déterminera.

$u_n = [(n-1)\, u_{n-1} - n]/(n+1)^2 = A(n)\, u_{n-1} + B(n)$

avec $A(n) = (n-1)/(n+1)^2$ et $B(n) = -\,n/(n+1)^2$

A(n) et B(n) tendent vers 0 quand n tend vers l'infini

Comme $u_{n-1} \in [-1, 0]$, $-A(n) \leq A(n)\, u_{n-1} \leq 0$, et donc $A(n)\, u_{n-1} \to 0$ quand $n \to \infty$

Donc $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

4) Montrer que, $\forall\, n \geq 2$, $u_n \leq -\,n/(n+1)^2$; établir que la suite (u_n) est croissante à partir du rang n = 2.

En reprenant l'expression $u_n = A(n)\, u_{n-1} + B(n)$, on a $A(n)\, u_{n-1} \leq 0$ et donc :

$u_n - B(n) = A(n)\, u_{n-1} \leq 0 \Rightarrow u_n - B(n) \leq 0$

$u_n \leq -\,n/(n+1)^2$

- $\forall\, n \geq 2$, $u_{n+1} - u_n = [nu_n - (n+1)]/(n+2)^2 - u_n$

$= -\,[u_n(n^2 + 3n + 4) + (n+1)]/(n+2)^2$

On a :

$n^2 + 3n + 4 \geq 0$

$u_n \leq -\,n/(n+1)^2$

$\Rightarrow u_n(n^2 + 3n + 4) + (n+1) \leq -\,n(n^2 + 3n + 4)/(n+1)^2 + (n+1) = (1-n)/(n+1)^2 < 0$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est-à-dire que la suite est croissante à partir du rang 2.

Exercice n° 2

1) Démontrons le résultat par récurrence :

- La propriété est vraie pour n = 0 : $P_0 = 1$
- Supposons-la vraie au rang n

$f^{(n+1)}(x) = [P_n'(x)\,(1 + x^2) - 2x(n + 1)P_n(x)]\,(1 + x^2)^{-(n+2)}$

Posons $P_{n+1}(x) = P_n'(x)\,(1 + x^2) - 2x(n + 1)P_n(x)$

Soit P_n de degré n, de premier terme a_nx^n ; le terme de plus haut degré de P_{n+1} est donc $n\,a_nx^{n+1} - 2(n+1)\,a_nx^{n+1} = -(n+2)\,a_nx^{n+1} \Rightarrow$ degré $P_{n+1} = n + 1$.

Tous les monômes de P_n ont la même parité que n : tous ceux de $x\,P_n(x)$ ont donc celle de n + 1, ceux de $P_n'(x)$ ont celle de n – 1, ceux de $P_n'(x)\,(1 + x^2)$ ont donc la parité de n + 1.

La propriété générale est donc vraie au rang n + 1.

2) Calcul de f'(x) :

$f'(x) = -2x / (1 + x^2)^2$

Donc : $(1 + x^2)f'(x) + 2xf(x) = 0 \quad \forall x \in R$

3) Partons de la relation établie à la question 2 : $(1 + x^2)f'(x) + 2xf(x) = 0$

Dérivons-la n fois :

$$\Sigma_{k=0 à n}\, C_n^k\,(1 + x^2)^{(k)}(f'(x))^{(n-k)} + 2\Sigma_{k=0 à n}\, C_n^k\, x^{(k)}(f(x))^{(n-k)} = 0$$

Or on remarque que $(1 + x^2)^{(k)} = 0$ dès que k > 2 et $x^{(k)} = 0$ dès que k > 1.

L'équation générale se simplifie grandement et devient :

$$(1 + x^2)(f'(x))^{(n)} + 2nx(f'(x))^{(n-1)} + n(n-1)(f'(x))^{(n-2)} + 2x(f(x))^{(n)} + 2n(f(x))^{(n-1)} = 0$$

d'où :

$$(1 + x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) + 2xf^{(n)}(x) + 2nf^{(n-1)}(x) = 0$$

et : $(1 + x^2)f^{(n+1)}(x) + 2(n + 1)xf^{(n)}(x) + n(n + 1)f^{(n-1)}(x) = 0$

En multipliant le tout par $(1 + x^2)^{n+1}$, on a :

$P_{n+1}(x) + 2(n+1)xP_n(x) + n(n+1)(1 + x^2)P_{n-1}(x) = 0$

4) D'après la relation définissant P_{n+1}, $P_{n+1}(x) = P_n'(x)\,(1 + x^2) - 2x(n + 1)P_n(x)$, vue à la question 1, en remplaçant $P_{n+1}(x)$ par cette expression dans la relation de la question 3, on obtient :

$P_n'(x) + n(n+1)P_{n-1}(x) = 0$

5) Dérivons la relation établie à la question 4.
Il vient :

$P_n''(x) + n(n+1)P_{n-1}'(x) = 0$

Or, en utilisant le résultat de la question 4 au rang n – 1, on a :

$P_{n-1}'(x) = - n(n-1)P_{n-2}(x)$, et donc $P_n''(x) = n^2(n-1)(n + 1)P_{n-2}(x)$

La quantité à étudier $A = (1 + x^2)\, P_n''(x) - 2nxP_n'(x) + n(n+1)P_n(x)$ peut être écrite :

$A = n^2(n-1)(n + 1)(1 + x^2)P_{n-2}(x) + 2n^2(n + 1)xP_{n-1}(x) + n(n+1)P_n(x)$

$= n(n + 1)[\, n(n-1)(1 + x^2)P_{n-2}(x) + 2nxP_{n-1}(x) + P_n(x)]$

Or la quantité entre crochets n'est autre que, écrite au rang n – 1, celle qui est considérée dans la relation E, donc égale à 0.

Exercice n° 3

1) $\mathrm{Ln}(1 + x) \approx x - x^2/2 + x^3/6$

2) Pour $x \neq 0$, $\mathrm{Ln}f(x) = - 1 + (x + 2)/2x\ \mathrm{Ln}(1 + x) \approx - x^2/12$

$f(x) \approx e^{-x^2/12} \approx 1 - x^2/12$

Donc $\mathrm{Ln}f(x) \to 0$ quand $x \to 0$ et donc $f(x) \to 1$ quand $x \to 0$; or $1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Dérivée en 0 :

$[f(x) - f(0)]/x \approx - x/12 \to 0$ quand $x \to 0$

$f'(0) = 0$

3) Soit $x \neq 0$; en passant par le Ln :

$f'(x)/f(x) = [- x^{-2}\text{Ln}(1 + x) + (x + 2)/2x(1 + x)]$

$f'(x) = f(x)\, x^{-2}\, [- \text{Ln}(1 + x) + ½\, (1 + x - (1 + x)^{-1}]$

D'où :

$f'(x) = x^{-2}\, \varphi(x)\, f(x),\ x \neq 0$

f est continue sur $]- 1, + \infty[$, φ est continue sur $]- 1, 0[$ et $]0, + \infty[$, et l'application $x \to x^2$ est continue sur $]- 1, + \infty[$, nulle en 0.
Donc f' est continue sur $]- 1, 0[$ et $]0, + \infty[$.

Au voisinage de $x = 0$:

$\varphi(x) = ½\, [1 + x - (1 + x)^{-1}] - \text{Ln}(1 + x) \approx ½\, [1 + x - (1 - x + x^2 - x^3)] - (x - x^2/2 + x^3/6) = - x^3/6$

$f'(x) \approx (1 - x^2/12)\, (- x^3/6)/x^2$

Donc $f'(x) \to 0$ quand $x \to 0$, donc f' est continue en 0 (puisqu'on a démontré en question 2 que $f'(0) = 0$).

4) On établit facilement que $\varphi'(x) = x^2/2(1 + x)^2$, donc positive.

φ est donc croissante, nulle en $x = 0$, et donc négative sur $]- 1, 0[$, positive pour $x > 0$.

5) Comme f' a le même signe que φ, f' est négative sur $]- 1, 0[$, nulle en 0, positive pour $x > 0$; f est donc décroissante sur $]- 1, 0[$, croissante pour $x > 0$, et passe par un minimum en $x = 0$ tel que $f(0) = 1$.

On en déduit que, $\forall\ x > - 1,\ f(x) \geq 1$.