ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

On définit la suite récurrente (u_n), $n \geq 1$, par :

$u_1 = 0$

$\forall\, n \geq 2 \quad (n + 1)^2 u_n = (n - 1)\, u_{n-1} - n$

1) Calculer u_2 et u_3.

2) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [-1, 0]$.

3) Montrer que la suite (u_n) admet une limite que l'on déterminera.

4) Montrer que, $\forall\, n \geq 2$, $u_n \leq -n/(n + 1)^2$; établir que la suite (u_n) est croissante à partir du rang $n = 2$.

Exercice n° 2

Soit f la fonction de R dans R définie par :

$$f(x) = (1 + x^2)^{-1}$$

On désigne par $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f.

1) Montrer que $f^{(n)}(x) = P_n(x)\ (1 + x^2)^{-(n+1)}$, où P_n est un polynôme de degré n dont tous les monômes ont des degrés de même parité que n. Calculer P_0 et P_1.

2) Donner une relation simple liant f(x), f'(x) et x.

3) En déduire la relation E :

$$\text{(E)}\quad P_{n+1}(x) + 2(n+1)xP_n(x) + n(n+1)(1 + x^2)P_{n-1}(x) = 0$$

4) Montrer que $P_n'(x) + n(n+1)P_{n-1}(x) = 0$

5) En déduire que le polynôme A défini par :

$$A = (1 + x^2)\ P_n''(x) - 2nxP_n'(x) + n(n+1)P_n(x)$$

est tel que A = 0.

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f définie sur] – 1, + ∞ [par :

$$f(x) = \frac{(1+x)^{\frac{x+2}{2x}}}{e} \quad \text{si } x \neq 0$$

$$f(x) = 1 \qquad \text{si } x = 0$$

1) Le symbole Ln désigne le logarithme népérien. Donner le développement limité à l'ordre 2 de la fonction Ln(1 + x) au voisinage de 0.

2) Donner le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0. Montrer que f est continue et dérivable en 0.

3) On considère la fonction φ définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$\varphi(x) = \frac{1}{2}[1 + x - (1 + x)^{-1}] - \text{Ln}(1 + x)$

Calculer $f'(x)$.
Montrer que $f'(x) = x^{-2}\varphi(x) f(x)$, $x \neq 0$.
En déduire que f' est continue sur $]-1, +\infty[$.

4) Etudier le signe de $\varphi(x)$ pour $x > -1$.

5) Démontrer que, pour $x > -1$, $f(x) \geq 1$.