

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES**ISE Option Économie****CORRIGÉ DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES****Problème 1**

1) Déterminons les coordonnées de Q_i .

Il est à l'intersection de la droite $y = ax$ et de la droite perpendiculaire à D_a et passant par le point M_i , d'équation :

$$(y - y_i)/(x - x_i) = -1/a$$

$$\text{ou encore : } y = -(x - x_i)/a + y_i$$

Les coordonnées du point Q_i sont solutions du système :

$$y = ax$$

$$y = -(x - x_i)/a + y_i$$

On obtient :

$$x(Q_i) = (x_i + ay_i)/(a^2 + 1)$$

$$y(Q_i) = a(x_i + ay_i)/(a^2 + 1)$$

$$(M_i Q_i)^2 = (x(Q_i) - x_i)^2 + (y(Q_i) - y_i)^2$$

En développant, on obtient $(M_i Q_i)^2 = [(ay_i - a^2 x_i)^2 + (ax_i - y_i)^2]/(a^2 + 1)^2$

$$\text{D'où } Q(a) = [(a^2 + 1)B + a^2(a^2 + 1)A - 2a(a^2 + 1)C]/(a^2 + 1)^2$$

$$= a^2 A/(a^2 + 1) + B/(a^2 + 1) - 2aC/(a^2 + 1)$$

Dérivons par rapport à a .

$$Q'(a) = 2 [Ca^2 + a(A - B) - C]/(a^2 + 1)^2$$

$$Q'(a) = 0 \Leftrightarrow Ca^2 + a(A - B) - C = 0$$

$\Delta = (A - B)^2 + 4C^2 > 0$; il existe donc deux solutions a_1 et a_2 :

$$a_1 = (B - A + [(A - B)^2 + 4C^2]^{1/2})/2C$$

$$a_2 = (B - A - [(A - B)^2 + 4C^2]^{1/2})/2C$$

Par ailleurs, on remarque dans l'équation $Ca^2 + a(A - B) - C = 0$ que le produit des racines est égal à -1 .

Les deux droites D_{a1} et D_{a2} , de pentes respectives a_1 et a_2 , sont donc perpendiculaires.

2) Soit à calculer $H(a) = \sum_{i=1}^n (M_i H_i)^2$.

Le point H_i a pour coordonnées (x_i, ax_i) .

$$(M_i H_i)^2 = (ax_i - y_i)^2$$

$$H(a) = \sum_i (ax_i - y_i)^2 = a^2 A - 2aC + B$$

$$H'(a) = 2aA - 2C = 0 \text{ et } a^* = C/A$$

Problème 2

1) On montre que $S(E)$ est un sous-espace vectoriel de $R[X]$ car $S(E) \subset R[X]$ et $S(E)$ est non vide car le polynôme nul vérifie E .

Il est simple d'établir que si P et Q sont solutions de E , $aP + bQ$ appartient à $S(E)$.

2) Soit $a_n x^n$ le terme du plus haut degré de P_n , solution de E .

En égalant les termes de degré n , on a :

$$n(n - 1) + 4n = a$$

$$\Rightarrow a = n(n + 3)$$

$$3) Q_n'(x) = -(-1)^n P_n'(-x)$$

$$Q_n''(x) = (-1)^n P_n''(-x)$$

On omet l'indice n pour simplifier les notations.

$$\text{Donc : } (x^2 - 1)Q''(x) + 4xQ'(x) = (-1)^n [(x^2 - 1)P''(-x) - 4xP'(-x)] = a P(-x)$$

$$\text{On en déduit : } (x^2 - 1)Q''(x) + 4xQ'(x) = (-1)^n a P(-x) = a Q(x)$$

Q est donc solution de E .

Supposons que $P - Q$ ne soit pas le polynôme nul.

Alors, le degré de $P - Q$ est inférieur ou égal à n .

Soit $a_n x^n$ le terme du plus haut degré de P , $(-1)^n a_n (-x)^n$ est le terme de plus haut degré de Q . Donc dans $P - Q$ il n'y a pas de terme de degré n ; notons r le degré de $P - Q$, $r \leq n - 1$.

Or $P - Q$ est solution de E , puisque P et Q sont solutions de E et $S(E)$ est un espace vectoriel.

D'après la première question, $a = r(r + 3)$, ce qui est impossible car, P étant solution, on a aussi $a = n(n + 3)$ et $r < n$.

Donc $P - Q$ est le polynôme nul, $P = Q$.

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$, ce qui prouve que P_n a la même parité que n .

$$4) P_0 = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = x^2 - 1/5$$

$$P_3(x) = x^3 + 5x^2/9 + 3x/7 - 1/9$$

Problème 3

1a) Il est évident que si f_1 et f_2 sont solutions de (E_1) , alors pour tous λ et μ réels, on a :

$$(\lambda f_1 + \mu f_2)'' - 3(\lambda f_1 + \mu f_2)' + 2(\lambda f_1 + \mu f_2) = 0$$

$(\lambda f_1 + \mu f_2)$ vérifie aussi la relation (E_1) .

1b) Ecrivons que $y = e^{ax}$ vérifie la relation (E_1) .

$$(a^2 - 3a + 2) e^{ax} = 0, \forall x$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

D'où deux valeurs pour a : $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$.

Les fonctions e^x et e^{2x} sont solutions de (E_1) .

1c) La forme générale des solutions de (E_1) , d'après (1a), est donc $(\lambda e^x + \mu e^{2x})$.

2) La courbe représentant $y = e^{3x}$ passe par le point $(0, 1)$ et a pour dérivée en : $y'(0) = 3$.

La courbe représentant $u = \lambda e^x + \mu e^{2x}$ est telle que $u(0) = \lambda + \mu$ et $u'(0) = \lambda + 2\mu$

Les valeurs particulières de λ et μ correspondant sont donc telles que :

$$\lambda + \mu = 1$$

$$\lambda + 2\mu = 3$$

D'où : $\lambda = -1$ et $\mu = 2$

$$\Rightarrow u(x) = -e^x + 2e^{2x}$$

3) k étant un réel strictement positif, montrons que les fonctions $h_k(x) = -k^2 e^x + 2k e^{2x}$ vérifient la relation (E_1) .

$$h_k'(x) = -k^2 e^x + 4k e^{2x}$$

$$h_k''(x) = -k^2 e^x + 8k e^{2x}$$

On vérifie facilement que $h_k''(x) - 3 h_k'(x) + 2 h_k(x) = 0$

4a) Soit maintenant l'équation : $(E_2) \ y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2$

Cherchons un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ solution de (E_2) .

$$P'' - 3P' + 2P = 2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = -x^2 + x + 2$$

$$\text{ou encore : } 2ax^2 + 2x(b - 3a) + 2a - 3b + 2c = -x^2 + x + 2$$

Par identification : $a = -1/2$, $b = -1$, $c = 0$

$$4b) \ f(x) = g(x) - x^2/2 - x \Rightarrow f'(x) = g'(x) - x - 1 \text{ et } f''(x) = g''(x) - 1$$

On en déduit que :

$$f''(x) - 3 f'(x) + 2f(x) = g''(x) - 3 g'(x) + 2g(x) - x^2 + x + 2$$

$$\text{Donc } g \text{ solution de } (E_1) \Leftrightarrow g''(x) - 3 g'(x) + 2g(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) - 3 f'(x) + 2f(x) = -x^2 + x + 2$$

$$\Leftrightarrow f \text{ solution de } (E_2)$$

Compte tenu des résultats de la question (1c), les fonctions f solutions de (E_2) sont de la forme : $\lambda e^x + \mu e^{2x} - x^2/2 - x$.