ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les trois problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère n points M_i, $1 \leq i \leq n$, le point M_i ayant pour coordonnées (x_i, y_i).

Soit D_a la droite d'équation $y = ax$, $a \in R - \{0\}$.

On note par $A = \Sigma_{i = 1 \text{ à } n} (x_i)^2$, $B = \Sigma_{i = 1 \text{ à } n} (y_i)^2$, $C = \Sigma_{i = 1 \text{ à } n} x_i y_i$.

A chaque point M_i, $1 \leq i \leq n$, on associe le point H_i, intersection de D_a et de la droite parallèle à l'axe y'Oy d'équation $x = x_i$, et le point Q_i, projection orthogonale de M_i sur D_a.

1) Calculer $Q(a) = \Sigma_{i = 1 \text{ à } n} (M_iQ_i)^2$

Déterminer, en fonction de A, B et C, les deux valeurs a_1 et a_2 de a pour lesquelles Q(a) passe par un extremum.

Montrer que les droites D_{a1} et D_{a2} associées à ces valeurs a_1 et a_2 sont perpendiculaires.

2) Calculer $H(a) = \Sigma_{i = 1 \text{ à } n} (M_iH_i)^2$

Déterminer en fonction de A, B et C la valeur a* de a pour laquelle H(a) passe par un extremum.

Problème 2

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

P étant un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on désigne par E l'équation suivante, où a est un paramètre réel :

$$(E) \qquad (x^2 - 1)P''(x) + 4xP'(x) = a.P(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

S(E) désigne l'ensemble des polynômes solutions de E.

1) Montrer que S(E) est un espace vectoriel réel.

2) On suppose que S(E) contient au moins un polynôme de degré n.
Exprimer la constante a en fonction de n.

3) Soit P_n, polynôme de degré inférieur ou égal à n, une solution de E.

   On définit $Q_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$.

   Montrer que Q_n est également solution de E.

   En déduire que P_n est un polynôme pair si n est pair, et impair si n est impair.

4) On se limite aux polynômes dont le coefficient du terme du plus haut degré est 1.
Calculer les solutions P_0, P_1, P_2, P_3 de l'équation E.

Problème 3

On se situe dans l'espace des fonctions de R dans R.

1) Soit l'équation différentielle :

$$(E_1)\ y'' - 3y' + 2y = 0$$

1a) Montrer que si f_1 et f_2 sont solutions de (E_1), alors pour tous λ et μ réels, $\lambda f_1 + \mu f_2$ est solution de (E_1).

1b) Chercher les solutions de (E_1) de la forme e^{ax}, où a est un nombre réel.

1c) Donner la forme générale des solutions de (E_1).

2) Quelle est la solution de (E_1) dont la courbe représentative admet au point d'abscisse $x = 0$ la même tangente que la courbe représentant $y = e^{3x}$?

3) Le paramètre k est un réel strictement positif.

Montrer que les fonctions $h_k(x) = -k^2 e^x + 2k e^{2x}$ vérifient la relation (E_1).

4) Soit l'équation : $(E_2)\ y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2$

4a) Déterminer le polynôme du second degré, P, solutions de (E_2).

4b) Soient f et g deux fonctions réelles de la variable réelle, telles que $f(x) = g(x) - x^2/2 - x$

Montrer que f est solution de (E_2) si et seulement si g est solution de (E_1).

En déduire les fonctions f solutions de (E_2).