

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES**ISE Option Économie****2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES****(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

Les trois problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème 1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé usuel d'origine O , on considère les deux droites parallèles D et Δ d'équations respectives $y = -1$ et $y = 2$.
On notera par R la rotation de centre O et d'angle $+\pi/3$.

1. Soit M un point quelconque du plan, de coordonnées x_M et y_M . Déterminer les coordonnées X et Y du transformé de M par la rotation R .
2. Donner l'équation de D' , transformée de D par la rotation R .
Trouver les coordonnées du point A intersection de D' et Δ .
3. Quelles sont les coordonnées de B , image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\pi/3$?
4. Caractériser le triangle OAB . Calculer sa surface.

Problème 2

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.
Soit n un entier naturel strictement positif. Pour tout n , on définit l'intégrale :

$$J(n) = \int_1^e (\text{Ln}x)^n dx$$

1. Calculer $J(1)$.

2. Montrer que $J(n)$ et $J(n+1)$ sont liées par une relation de la forme $J(n+1) = a + bJ(n)$ où a et b sont des paramètres que l'on précisera.
En déduire les valeurs de $J(2)$, $J(3)$ et $J(4)$.
3. Etudier très précisément la suite $J(n)$ (signe, croissance ou décroissance). Quelle est sa limite ? Quelle est la limite de $nJ(n)$?

Problème 3

Une loterie est constituée par une urne contenant un ensemble de n billets tous différents ($n \geq 3$) dont deux seulement sont gagnants.

L'objet du problème est de comparer deux stratégies de tirage.

1. Stratégie n°1 : Un joueur tire au hasard et simultanément deux billets dans l'urne.
On note par X la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux billets tirés par le joueur.
 - a) Calculer les probabilités $p(x) = P(X = x)$, pour $x = 0, 1, 2$.
 - b) Calculer $E(X)$, espérance de X , et $V(X)$, variance de X .
 - c) Application numérique : $n = 10$
2. Stratégie n°2 : Un joueur tire au hasard successivement deux billets dans l'urne, remettant le premier billet dans l'urne avant de procéder au second tirage.
Dans ce mode de tirage, on note par Y la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux billets tirés par le joueur.
 - a) Déterminer la loi de probabilité de Y .
 - b) Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
 - c) Application numérique : $n = 10$
3. On s'intéresse maintenant à la probabilité d'avoir un et un seul billet gagnant parmi les deux billets choisis.
On note : $a(n) = P(X = 1)$ et $b(n) = P(Y = 1)$.
 - a) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a la relation :
$$a(n) - b(n) = 4(n - 2) / n^2(n - 1)$$
 - b) Déterminer un entier naturel n^* tel que, pour tout $n \geq n^*$, on ait : $a(n) - b(n) < 10^{-3}$
- 4) L'objectif est maintenant de gagner à cette loterie : parmi les deux stratégies étudiées, laquelle préférez-vous ?