AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1 :

E est un espace vectoriel sur R, de dimension 3, de base B = (e_1, e_2, e_3) ; T est l'espace vectoriel sur R des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients réels. O est la matrice nulle, I la matrice identité de T.

Soit U un élément de T, $U \neq O$ et $U \neq I$.

On définit l'application φ_U de T dans T par : $\varphi_U(X) = UX - XU$.

1) Montrer que φ_U est linéaire.

Soient a et b deux réels, X et Y deux éléments de T.
$\varphi_U(aX+bY) = U(aX+bY) - (aX+bY)U = aUX + bUY - aXU - bYU$
$= a(UX - XU) + b(UY - YU)$
$= a\varphi_U(X) + b\varphi_U(Y)$

2) L'application φ_U est-elle une bijection ?

I étant la matrice identité de T, $\varphi_U(I) = UI - IU = U - U = O$
I appartient donc au noyau de φ_U.
Ker $\varphi_U \neq \{0\} \Rightarrow \varphi$ n'est pas injective et donc non bijective.

Problème 2 :

On considère le système (S) suivant, composé de deux équations à deux inconnues réelles x et y :

$$\begin{cases} ax - by = c \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

Les paramètres a, b et c sont obtenus en lançant trois fois consécutives, de façon indépendante, un dé supposé parfait, à six faces numérotées de 1 à 6. Le premier lancer donne la valeur de a, le deuxième celle de b et le troisième celle de c.

1) Combien y a-t-il de valeurs possibles pour le triplet (a, b, c) ?

Il y a $6^3 = 216$ possibilités pour le triplet (a, b, c)

Dans toute la suite du problème, on donnera les probabilités demandées sous forme de fraction de dénominateur 108.

2) Calculer la probabilité P_1 pour que (S) ait une infinité de solutions.

Pour que (S) ait une infinité de solution, les deux équations doivent être proportionnelles, soit :

> a = 1, b = 2 et c = 3
> ou
> a = 2, b = 4 et c = 6

Aucune autre configuration de tirages ne conduit à la même équation $x – 2y = 3$.
La probabilité P_1 pour que (S) ait une infinité de solutions est donc 2/216 = 1/108.

3) Calculer la probabilité P_2 pour que (S) n'admette aucune solution.

Pour qu'il n'y ait pas de solution, il faut que $b – 2a = 0$.
Cela conduit à :

> a = 1, b = 2, et $c \neq 3$ (car si c = 3, on est dans le cas précédent)
> a = 2, b = 4, et $c \neq 6$
> a = 3, b = 6, et c prend n'importe quelle valeur

Soit au total 5 + 5 + 6 = 16 cas possibles.
La probabilité P_2 pour que (S) n'admette aucune solution est 16/216 = 8/108.

4) Calculer la probabilité P_3 pour que (S) admette une solution unique.

Il existe une et une seule solution si $b – 2a \neq 0$.
Soit :

> a = 1, b = 1, 3, 4, 5, 6 , $\forall$ c
> a = 2, b = 1, 2, 3, 5, 6 , $\forall$ c
> a = 2, b = 1, 2, 3, 4, 5 , $\forall$ c
> a = 4, $\forall$ b, $\forall$ c
> a = 5, $\forall$ b, $\forall$ c
> a = 6, $\forall$ b, $\forall$ c

Cela représente 3 x 6 x 5 + 3 x 36 = 198 cas possibles.
La probabilité P_3 pour que (S) admette une solution unique est 198/218 = 99/108.

On vérifie $P_1 + P_2 + P_3 = 1$.

5) Calculer la probabilité P_4 pour que (S) admette le couple (x = 3, y = 0) comme unique solution.

Si (3, 0) est solution : $3a – 0 = c$
$\Rightarrow$ a = 1 et c = 3, ou a = 2 et c = 6, et b est quelconque.
$P_4 = 12/216 = 6/108$

Problème 3 :

Partie I :

Soit k un nombre réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur] 0, $+\infty$[par :

$f_k(x) = k^2x^2 – (Lnx)/2 – 1/4$

1) Etudier les variations de f_k.

$f_k'(x) = 2k^2x – 1/2x = (2kx – 1)(2kx + 1)/2x$
$f_k(1/2k) = (Ln(2k))/2$

f_k est décroissante de 0 à 1/2k, passe par le minimum (1/2k, (Ln2k)/2), puis croît ensuite, avec une branche parabolique.
Lim $_{x\to 0}$ $f_k(x) = + \infty$, lim $_{x\to +\infty}$ $f_k(x) = + \infty$.

2) Soit M(k) le point correspondant au minimum de f_k.
Donner l'équation de l'ensemble des points M(k) quand k décrit] 0, $+\infty$[.

Les coordonnées de M(k) sont (1/2k, (Ln(2k))/2).
L'équation de la courbe représentant les points M(k) est y = – (Lnx)/2.

Partie II :

On prend dans cette partie k = 1/2. On notera f la fonction $f_{1/2}$.

1) Donner précisément le tableau de variations de f.

$f(x) = x^2/4 – (Lnx)/2 – 1/4$
Le point minimum M a pour coordonnées (1, 0).
f est décroissante de 0 à 1, passe par le minimum (1, 0), puis croît ensuite.

2) Soit a un réel strictement positif.

Calculer $I(a) = \int_a^1 f(x)dx$.

La primitive de f(x) est $x^3/12 – (xLnx)/2 + x/4$

$I(a) = 1/12 + 1/4 – a^3/12 + (aLna)/2 – a/4$
$= 1/3 – a^3/12 + (aLna)/2 – a/4$

3) Déterminer la limite de I(a) quand $a \to 0^+$.

Quand $a \to 0^+$, $I(a) \to 1/3$.

4) Soit n entier naturel, $n \geq 2$; on pose pour p entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$:

$S(n) = [\Sigma_{p=1 à n} f(p/n)]/n$

4a) Soit p tel que $1 \leq p \leq n-1$; on note J(p, n) l'intervalle élémentaire J(p, n) = [p/n, (p+1)/n].

Démontrer que : $f((p+1)/n) \leq n \int_{J(p,n)} f(x)dx \leq f(p/n)$

$p/n \leq x \leq (p+1)/n$

$\Rightarrow f((p+1)/n) \leq f(x) \leq f(p/n)$, pour $p \leq n-1$, car on est dans l'intervalle où f décroît.

En intégrant entre p/n et (p+1)/n :

$\int_{J(p,n)} f((p+1)/n)dx \leq \int_{J(p,n)} f(x)dx \leq \int_{J(p,n)} f(p/n)dx \leq$

$\Rightarrow [f((p+1)/n)]/n \leq \int_{J(p,n)} f(x)dx \leq [f(p/n)dx]/n$

4b) En déduire l'encadrement :

$S(n) - f(1/n)/n \leq I(1/n) \leq S(n)$

En sommant pour p = 1 à n l'inégalité obtenue à la question 4a, on obtient :

$[\Sigma_{p=1 à n} f((p+1)/n)]/n \leq I(1/n) \leq [\Sigma_{p=1 à n} f(p/n)]/n$

$\Leftrightarrow S(n) - f(1/n)/n \leq I(1/n) \leq S(n)$

$\Leftrightarrow I(1/n) \leq S(n) \leq I(1/n) + f(1/n)/n$

4c) En déduire la limite de S(n) quand $n \to +\infty$.

Quand $n \to +\infty$, $I(1/n) \to 1/3$, $f(1/n)/n$ tend vers 0 $\Rightarrow S(n) \to 1/3$.

Problème 4 :

C désigne le corps des nombres complexes.

Soit f la fonction de C dans C définie, pour $z \neq 2i$, par :

$f(z) = (z-1)/(z-2i)$

M, A et B sont les points d'affixes respectives z, 1, 2i.

1) Donner les formes cartésienne et trigonométrique de f(i).

$f(i) = (i-1)/(-i) = -1 - i$
$f(i) = 2^{1/2} (\cos(-3\pi/4) + i.\sin(-3\pi/4))$

2) Résoudre l'équation f(z) = 2i

$f(z) = (z - 1)/(z - 2i) = 2i \Leftrightarrow z - 1 = 2i(z - 2i) \Leftrightarrow z - 1 = 2iz + 4 \Leftrightarrow z(1 - 2i) = 5$
$\Leftrightarrow z = 5/(1 - 2i) = 1 + 2i.$

3) Déterminer l'ensemble D des points M tels que $|f(z)| = 2$.

$|f(z)| = 2 \Leftrightarrow |z - 1| = 2.|z - 2i| \Leftrightarrow |x + iy - 1| = 2.|x + iy - 2i|$
$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 4(x^2 + (y - 2)^2)$

$\Leftrightarrow (x + 1/3)^2 + (y - 8/3)^2 = 20/9$

D est le cercle de centre (- 1/3, 8/3) et de rayon $R = 2.5^{1/2}/3$.

Problème 5 :

B est la base canonique de l'espace vectoriel C^4, C étant l'ensemble des nombres complexes. M est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4, à coefficients complexes.
Id est l'application identité de C^4 dans C^4, I est sa matrice identité associée.
0 est le symbole de la composition des applications.

Soit g l'application de C^4 dans C^4 dont la matrice associée est J :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de g. La matrice J est-elle diagonalisable ?

L'équation conduisant aux valeurs propres est $\lambda^4 - 1 = 0$, soit 4 solutions distinctes :
$\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $\lambda = i$, $\lambda = -i$.
La forme générique des vecteurs propres associés à la v.p. λ est donc $(x, \lambda x, \lambda^2 x, \lambda^3 x)$.
Chaque sous-espace propre est de dimension 1, la somme de dimensions vaut 4, la matrice J est diagonalisable.

2) A tout quadruplet (a, b, c, d) de C^4, on associe la matrice A suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

On note φ l'application dont A est la matrice relativement à la base B.

Montrer que φ est une combinaison linéaire de Id, g, g^2 (= g o g), g^3 (= g o g o g).

La matrice associée à g^2 est J^2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De même, la matrice associée à g^3 est J^3 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve aisément que $A = aI + bJ + cJ^2 + d\,J^3$, ou encore :
$\varphi = a.Id + b.g + c.g^2 + d.g^3$.