

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve comporte cinq problèmes indépendants à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 :

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 3, de base $B = (e_1, e_2, e_3)$; T est l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients réels. O est la matrice nulle, I la matrice identité de T.

Soit U un élément de T, $U \neq O$ et $U \neq I$.

On définit l'application φ_U de T dans T par : $\varphi_U(X) = UX - XU$.

- 1) Montrer que φ_U est linéaire.
- 2) L'application φ_U est-elle une bijection ?

Problème 2 :

On considère le système (S) suivant, composé de deux équations à deux inconnues réelles x et y :

$$\begin{cases} ax - by = c \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

Les paramètres a, b et c sont obtenus en lançant trois fois consécutives, de façon indépendante, un dé supposé parfait, à six faces numérotées de 1 à 6. Le premier lancer donne la valeur de a, le deuxième celle de b et le troisième celle de c.

- 1) Combien y a-t-il de valeurs possibles pour le triplet (a, b, c) ?

Dans toute la suite du problème, on donnera les probabilités demandées sous forme de fractions de dénominateur 108.

- 2) Calculer la probabilité P_1 que (S) ait une infinité de solutions.
- 3) Calculer la probabilité P_2 que (S) n'admette aucune solution.
- 4) Calculer la probabilité P_3 que (S) admette une solution unique.
- 5) Calculer la probabilité P_4 que (S) admette le couple $(x = 3, y = 0)$ comme unique solution.

Problème 3 :

Partie I :

Soit k un nombre réel strictement positif.

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_k(x) = k^2 x^2 - (\ln x)/2 - 1/4$$

- 1) Etudier les variations de f_k .
- 2) Soit $M(k)$ le point correspondant au minimum de f_k .
Donner l'équation de l'ensemble des points $M(k)$ quand k décrit $]0, +\infty[$.

Partie II :

On prend dans cette partie $k = 1/2$. On notera f la fonction $f_{1/2}$.

- 1) Donner précisément le tableau de variations de f .
- 2) Soit a un réel strictement positif. Calculer $I(a) = \int_a^1 f(x)dx$.
- 3) Déterminer la limite de $I(a)$ quand $a \rightarrow 0^+$.
- 4) Soit n entier naturel, $n \geq 2$; on pose pour p entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$:

$$S(n) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n f(p/n)$$

4a) Soit p tel que $1 \leq p \leq n - 1$; on note $J(p, n)$ l'intervalle élémentaire $J(p, n) = [p/n, (p+1)/n]$.

Démontrer que : $f((p+1)/n) \leq n \int_{J(p,n)} f(x)dx \leq f(p/n)$.

4b) En déduire l'encadrement :

$$S(n) - f(1/n)/n \leq I(1/n) \leq S(n).$$

4c) En déduire la limite de $S(n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Problème 4 :

$\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes.

Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie, pour $z \neq 2i$, par :

$$f(z) = (z - 1)/(z - 2i)$$

M , A et B sont les points d'affixes respectives z , 1 , $2i$.

- 1) Donner les formes cartésienne et trigonométrique de $f(i)$.
- 2) Résoudre l'équation $f(z) = 2i$
- 3) Déterminer l'ensemble D des points M tels que $|f(z)| = 2$.

Problème 5 :

B est la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^4$, $\mathbb{C}$ étant l'ensemble des nombres complexes. M est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4, à coefficients complexes.

Id est l'application identité de $\mathbb{C}^4$ dans $\mathbb{C}^4$, I est sa matrice identité associée.
 $\circ$ est le symbole de la composition des applications.

Soit g l'application de $\mathbb{C}^4$ dans $\mathbb{C}^4$ dont la matrice associée est J :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de g . La matrice J est-elle diagonalisable ?
- 2) A tout quadruplet (a, b, c, d) de $\mathbb{C}^4$, on associe la matrice A suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

On note φ l'application dont A est la matrice relativement à la base B .

Montrer que φ est une combinaison linéaire de Id , g , $g^2 (= g \circ g)$, $g^3 (= g \circ g \circ g)$.