AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA $2^{ème}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 :

1) Soit A la matrice carrée :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1a) Trouver les valeurs propres λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) et des vecteurs propres v_1 et v_2 associés de la matrice A.
On notera par D la matrice diagonale formée par les valeurs propres rangées dans l'ordre croissant.

L'équation caractéristique est $-\lambda(5 - \lambda) + 6 = 0$, soit $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Elle admet deux racines : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

Vecteur propre associé à $\lambda_1 = 2$:
$3x - 6y = 0$
On prend (par exemple) $x = 2$ et $y = 1$

Vecteur propre associé à $\lambda_2 = 3$:
$2x - 6y = 0$
On prendra $x = 3$ et $y = 1$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1b) Donner l'expression d'une matrice régulière P telle que $A = P D P^{-1}$

La matrice P est formée par les vecteurs propres.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Un calcul simple montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

On vérifie aisément $A = P D P^{-1}$

1c) En déduire la matrice A^n, n entier strictement positif.

Par construction, on a :
$A^n = P\,D^n\,P^{-1}$

En effectuant les produits, on trouve :

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3.2^{n+1} - 2.3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3.2^n - 2.3^n \end{pmatrix}$$

2) On considère la suite récurrente d'ordre 2 définie par :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

avec $u_0 = u_1 = 1$

On note V_{n+2} le vecteur colonne $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1}. \end{pmatrix}$

2a) Montrer que $V_{n+2} = A\,V_{n+1}$

Le résultat est évident.

2b) En déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n.

Partant de $V_{n+1} = A\,V_n$, et allant jusqu'à $V_2 = A\,V_1$, on en déduit :

$V_{n+1} = A^n\,V_1$, avec $(V_1)' = (1, 1)$

Or $V_{n+2} = (u_{n+1}, u_n)'$

Pour avoir l'expression de u_n, il suffit de prendre la somme des termes de la deuxième ligne de A^n.

Soit $u_n = -2^n + 3^n + 3.2^n - 2.3^n = 2^{n+1} - 3^n$

2c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$u_n = 2^{n+1} - 3^n = 3^n\,(2(2/3)^n - 1)$ qui tend vers $-\infty$ quand $n \to +\infty$.

<u>Problème 2</u> :

N désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.

Pour tout entier non nul n, on définit les sommes suivantes :

$$S_1(n) = 1 + 2 \ldots. + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Partie I :

1) Démontrer que $S_1(n) = n(n + 1)/2$.

On peut faire la démonstration par récurrence (classique), ou tout simplement écrire que $2 S_1(n) = (1 + 2 + ... + n) + (n + n-1 + n-2 + ... + 2 + 1) = (1+n) + (2 +n-1) + (3 + n-2) + ... + (n-1 + 2) + (n + 1) = n(n + 1)$

D'où $S_1(n) = n(n + 1)/2$.

C'est ce calcul qui a été historiquement fait par Carl Gauss.

2) On désire établir une relation entre $S_3(n)$ et $S_1(n)$ de la forme $S_3(n) = h(S_1(n))$.
Le plan étant rapporté à un repère orthonormal usuel, d'origine O, on définit par leurs coordonnées les trois suites de points ci-après ($n \geq 1$) :

$A_n (S_1(n), 0)$

$C_n (0, S_1(n))$

$B_n (S_1(n), S_1(n))$

2a) Quelle est la forme du quadrilatère $Q_n = (O, A_n, B_n, C_n)$?

Le quadrilatère est un carré de côté $S_1(n)$.
La suite des quadrilatères Q_n est une suite croissante de carrés emboîtés, telle que $Q_n \subset Q_{n+1}$.

2b) Donner l'aire q_n de Q_n

L'aire q_n de Q_n n'est autre que $[S_1(n)]^2$.

2c) Pour $n \geq 2$, donner l'aire p_n du polygone $(A_{n-1}, A_n, B_n, C_n, C_{n-1}, B_{n-1}, A_{n-1})$

L'aire p_n du polygone est égale à $n.S_1(n-1) + n.S_1(n)$.

Soit $p_n = n.S_1(n-1) + n.S_1(n).= n. (n-1)n/2 + n. n(n+1)/2 = n^3$

2d) En déduire la relation $S_3(n) = h(S_1(n))$, et l'expression de $S_3(n)$ en fonction de n.

On passe du carré Q_{n-1} au carré Q_n en ajoutant le polygone.

Soit, en aires : $q_n = q_1 + p_2 + p_3 +.... + p_n$

Or $q_n = [S_1(n)]^2$; et $q_1 + p_2 + p_3 +.... + p_n = 1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

D'où : $S_3(n) = [S_1(n)]^2 = n^2 (n + 1)^2 / 4$

Partie II :

On considère le polynôme à coefficients réels défini par :

$$P(x) = ax + bx^2 + x^3/3$$

et vérifiant la relation suivante :

$$\forall x \in R, P(x + 1) – P(x) = x^2$$

1) Calculer P(0), P(1), P(2), P(3), P(-1).

$P(0) = 0$
$P(1) – P(0) = 0$ d'où $P(1) = 0$
$P(2) = 1$
$P(3) = 4 + 1 = 5$
$P(x + 1) – x^2 = P(x)$ d'où $P(-1) = -1$

2) Calculer les coefficients a et b.
A partir de P(1) et P(-1) :

$0 = a + b + 1/3$

$-1 = - a + b – 1/3$

$\Rightarrow b = -1/2$ et $a = 1/6$

$P(x) = (x - 3x^2 + 2x^3)/6 = x(x – 1)(2x – 1)/6$

3) Montrer que la somme $S_2(n)$ est égale à la valeur du polynôme P en un point que l'on précisera.

$P(n+1) = P(n) + n^2$

$P(2) = P(1) + 1^2 = 1^2$

En additionnant membre à membre, on en déduit :

$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + …. + n^2 = P(n + 1)$

4) Donner l'expression explicite de $S_2(n)$ en fonction de n.

$S_2(n) = P(n+1) = (n + 1)(n + 1 – 1)(2n + 2 – 1)/6 = n(n + 1)(2n + 1)/6$

<u>Partie III</u> :

On définit $I_3(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3$, somme des cubes des n premiers nombres impairs.

1) A l'aide des expressions de $S_1(n)$, $S_2(n)$ et $S_3(n)$ trouvées dans les deux premières parties, montrer que $I_3(n) = 2n^4 – n^2$.

$(2k – 1)^3 = 8k^3 – 12k^2 + 6k – 1$

On en déduit :

$I_3(n) = 8 S_3(n) – 12 S_2(n) + 6 S_1(n) – n$

En remplaçant les sommes par les expressions trouvées, après simplification, il s'en suit :

$I_3(n) = 2n^4 – n^2$.

2) Déterminer l'entier n tel que la somme des cubes des n premiers nombres entiers impairs soit égale à 29 161.

Soit $X = n^2$ $(X > 0)$

$2X^2 – X – 29161 = 0$

$\Delta = 233289 = (483)^2$

Seule racine admissible en X : X = 121

D'où n = 11.

La somme des cubes de 11 premiers nombres impairs (de 1 à 21) vaut 29161.

3) Donner en fonction de n l'expression de $U_3(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k)^3$, somme des cubes des n premiers nombres pairs.

Première méthode :

$U_3(n) = 8S_3(n) \Rightarrow U_3(n) = 8\, n^2\, (n + 1)^2 / 4 = 2n^2(n + 1)^2$

Deuxième méthode:

$I_3(n) + U_3(n)$ n'est autre que la somme des cubes des 2n premiers nombres entiers.

$2n^4 - n^2 + U_3(n) = (2n)^2\, (2n + 1)^2 / 4$

$\Rightarrow U_3(n) = n^2(2n + 1)^2 - 2n^4 + n^2$

$= n^2(4n^2 + 4n + 1 - 2n^2 + 1) = 2n^2\, (n + 1)^2$