AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1 :

Soit f une application f de]0, 1 [dans R^+ définie par $x \to f(x) = x - 2x^{1/2} + 1$.
Le symbole o représente la composition des applications.

Montrer que f o f (x) = x.

Correction :

Il est évident que $f(x) = (\sqrt{x} - 1)^2$

On a donc : $f \circ f(x) = (f^{1/2} - 1)^2 = f - 2f^{1/2} + 1$

Or $f^{1/2}(x) = 1 - x^{1/2}$ puisque x est compris entre 0 et 1.

D'où : $f \circ f(x) = f - 2f^{1/2} + 1 = x - 2x^{1/2} + 1 - 2(1 - x^{1/2}) + 1 = x$.

Exercice n° 2 :

Un individu vit dans un environnement où il est susceptible d'être contaminé par une maladie. Son état de santé est suivi mensuellement.
Pour un mois donné m, trois états sont possibles :

- il est immunisé (état I)
- il est malade (état M)
- il est non malade et non immunisé (état S)

D'un mois m au mois suivant m+1, son état peut évoluer selon les règles épidémiologiques suivantes :

- étant immunisé au mois m, il peut, au mois m+1, être encore immunisé avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1
- étant malade au mois m, il peut, au mois m+1, être encore malade avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état immunisé avec une probabilité 0,8
- étant en l'état S au mois m, il peut, au mois m+1, être encore en l'état S avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état malade M avec une probabilité 0,5.

1 – Ecrire la matrice A qui résume les probabilités de transition entre l'état du mois m et l'état du mois m+1.

Correction :

Soient e(m) l'état au mois m, e(m+1) l'état au mois m+1.

Par les probabilités conditionnelles, on a les relations suivantes :

P(I(m+1)) =
P(I(m+1)/I(m)).P(I(m)) + P(I(m+1)/M(m)).P(M(m)) + P(I(m+1)/S(m)).P(S(m))

De même :

P(M(m+1))=
P(M(m+1)/I(m)).P(I(m)) + P(M(m+1)/M(m)).P(M(m)) + P(M(m+1)/S(m)).P(S(m))

P(S(m+1))=
P(S(m+1)/I(m)).P(I(m)) + P(S(m+1)/M(m)).P(M(m)) + P(S(m+1)/S(m)).P(S(m))

Avec les valeurs des probabilités proposées :
P(I(m+1) = 0,9.P(I(m)) + 0,8.P(M(m))

De même :

P(M(m+1) = 0,2.P(M(m)) + 0,5.P(S(m))
P(S(m+1) = 0,1.P(I(m)) + 0,5.P(S(m))

Considérons A la matrice de transition (3, 3) donnant les probabilités de passage d'un état e(m) au mois m à un état e(m+1) au mois m+1 :

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

En notant E(m) = (P(I(m)), P(M(m)), P(S(m))) le vecteur-ligne des probabilités décrivant l'état de l'individu au mois m, les relations issues des probabilités conditionnelles s'écrivent matriciellement :

E(m+1) = E(m).A

2 – Dans chacun des cas suivants, calculer les probabilités pour qu'un individu soit dans l'état e au mois m+2, e = I ou M ou S, sachant :

a) qu'il était immunisé au mois m

b) qu'il était non malade et non immunisé au mois m

c) qu'il était malade au mois m

E(m+2) = E(m+1).A = E(m).A²

Le calcul de la matrice A² conduit à $A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}81 & 0{,}05 & 0{,}14 \\ 0{,}88 & 0{,}04 & 0{,}08 \\ 0{,}4 & 0{,}35 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

Cas a : E(m) = (1, 0, 0)

P(I(m+2) = 0,81
P(M(m+2)) = 0,05
P(S(m+2)) = 0,14

Cas b : E(m) = (0, 0, 1)
P(I(m+2) = 0,4
P(M(m+2)) = 0,35
P(S(m+2)) = 0,25

Cas c : E(m) = (0, 1, 0)
P(I(m+2) = 0,88
P(M(m+2)) = 0,04
P(S(m+2)) = 0,08

Problème :

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.

On considère la suite de fonctions f_n où, pour tout entier n strictement positif, la fonction f_n est définie sur l'intervalle]0, +∞ [par :

$$f_n(x) = (\text{Ln } x) / x^n$$

1 – Etudier précisément les variations de f_n, pour $n \geq 1$ (limites, points particuliers, …). Soient x_M et y_M les coordonnées du point M en lequel f_n passe par son maximum. Déterminer le lieu géométrique de M, courbe décrite par le point M, lorsque n varie sur l'ensemble des nombres entiers.

Correction :
Soit $y = (\text{Ln } x) / x^n$, x > 0.

Dérivée :
$y' = (1 – n \text{ Ln } x)/x^{n+1}$
Le signe de y' est celui du numérateur (1 – n Ln x) :

$y' = 0 \Leftrightarrow x = e^{1/n}$
$y' > 0 \Leftrightarrow x < e^{1/n}$
$y' < 0 \Leftrightarrow x > e^{1/n}$

Dérivée seconde :
Un calcul simple permet d'établir que :
$y'' = (n(n+1)\text{Ln } x – (2n +1))/ x^{n+2}$

Il existe donc un point d'inflexion d'abscisse x_I vérifiant $n(n+1)\text{Ln } x_I - (2n+1) = 0$, soit :
$x_I = \exp[(2n+1)/n(n+1)]$

Son ordonnée : $y_I = (1 + 2n) / (n(n+1)\exp[(2n+1)/(n+1)])$

Lieu géométrique du Maximum : $x_M = e^{1/n}$ et $y_M = 1/ne$
On en déduit, en éliminant n, que les points M appartiennent à la courbe d'équation $y_M = (\text{Ln } x_M)/e$
On remarque que $x_M = e$ pour $n = 1$, supérieur à 2, et que pour $n \geq 2$, la valeur de x_M est strictement comprise entre 1 et 2.

Point fixe : on remarque que, pour tout n, $f_n(1) = 0$.
Le point A (1, 0) est un point fixe du faisceau de courbes représentant les fonctions $f_n(x)$ lorsque n varie.

Limites :

$$\underset{x \to +0}{Lim} f_n(x) = -\infty$$

$$\underset{x \to +\infty}{Lim} f_n(x) = 0$$

Tableau de variations :

X	0	1	x_M	$+\infty$
y'		+	0	–
Y	$-\infty$ ↗	0 ↗	$(ne)^{-1}$	↘ 0

2 – Pour tout réel u, $u \geq 1$, on définit l'intégrale $J_n(u)$ par :

$$J_n(u) = \int_1^u f_n(x)dx$$

2a – Exprimer $J_n(u)$ en fonction de u et de n.
(Indication : on pourra être conduit à distinguer les cas $n = 1$ et $n \geq 2$).
Calculer $J_n(2)$.

<u>Correction</u> :

$$J_n(u) = \int_1^u f_n(x)dx$$

Cas $n \geq 2$:

En intégrant par parties :

$J_n(u) = [x^{1-n}\text{Ln } x/(1-n)]_1 + \int_1^u \frac{dx}{(1-n)x^n}$

$J_n(u) = -\text{Ln } u/(n-1)\, u^{n-1} - 1/(n-1)^2u^{n-1} + 1/(n-1)^2$

Cas $n = 1$:

$J_1(u) = \int_{[1,u]} (\text{Ln } x)/x \ dx = \int_{[0,\text{Ln } u]} v\, dv$ en faisant le changement de variable $v = \text{Ln } x$
$J_1(u) = v^2/2$ pris entre 0 et Ln u, soit $J_1(u) = (\text{Ln } u)^2/2$.

Calcul de $J_n(2)$.
Pour $n \geq 2$, $J_n(2) = -\text{Ln } 2/(n-1)2^{n-1} - 1/(n-1)^2 2^{n-1} + 1/(n-1)^2$
Pour $n = 1$, $J_1(2) = (\text{Ln } 2)^2/2 = 0{,}24$.

2b – On pose $F_n(u) = J_n(u) - J_n(2)$.
Exprimer $F_n(u)$ en fonction de u et de n.

Correction :

Pour $n = 1$, $F_1(u) = J_1(u) - J_1(2) = [(\text{Ln } u)^2 - (\text{Ln } 2)^2]/2$.

Pour $n \geq 2$, $F_n(u) = J_n(u) - J_n(2)$
$= [(\text{Ln } 2)/2^{n-1} - (\text{Ln } u)/u^{n-1}]/(n-1) + [1/2^{n-1} - 1/u^{n-1}]/(n-1)^2$

Remarque : pour $n \geq 2$, on constate que $F_n(u)$ est bornée supérieurement par la quantité $(\text{Ln } 2)/2^{n-1}(n-1) + 1/2^{n-1}(n-1)^2$.

2c – Déterminer $\lim_{u \to +\infty} J_n(u)$ et $\lim_{u \to +\infty} F_n(u)$

Correction :
Pour $n = 1$, $J_1(u) \to +\infty$ quand $u \to +\infty$
et $F_1(u) \to +\infty$ quand $u \to +\infty$

Pour $n \geq 2$, $J_n(u) \to 1/(n-1)^2$ quand $u \to +\infty$
et $F_n(u) \to (\text{Ln } 2)/2^{n-1}(n-1) + 1/2^{n-1}(n-1)^2$ quand $u \to +\infty$

3 – Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la suite v définie par son terme général d'ordre p, p entier strictement supérieur à 2 :

$$v(p) = \sum_{k=2}^{p} f_n(k) = \sum_{k=2}^{p} (\text{Ln } k)/k^n$$

3a – Montrer que la suite v(p) est croissante.

Correction :
$v(p+1) - v(p) = \text{Ln}(p+1)/(p+1)^n > 0$.
La suite est donc croissante.

3b - Montrer que pour tous entiers n et k, $n \geq 2$, $k \geq 2$, on a :

$$f_n(k+1) \leq \int_k^{k+1} f_n(x)dx \leq f_n(k)$$

Correction :
D'après la question 1, on sait que la fonction f_n est décroissante pour $x > x_M$. Or pour $n > 1$, $x_M < 2$.
Donc pour $k \geq 2$, la fonction f_n est décroissante sur tout intervalle [k, k+1] :
$k \leq x \leq k+1 \Leftrightarrow f_n(k+1) \leq f_n(x) \leq f_n(k)$

En intégrant entre k et k+1, on trouve bien la double inégalité recherchée pour l'intégrale.

3c – En déduire que $v(p) – (Ln2)/2^n \leq F_n(p) \leq v(p) – (Ln\ p)/p^n$.

Correction :
Par construction, $J_n(p) = \int_{[2,p]} f_n(x)dx$
$F_n(p)$ est donc la somme des intégrales de f_n entre k et k+1 pour k allant de 2 à p –1.

On en déduit : $f_n(3) + \ldots.. + f_n(p) \leq F_n(p) \leq f_n(2) + \ldots.. + f_n(p – 1)$

Le terme de gauche est égal = $v(p) – Ln\ 2/2^n$.
Le terme de droite est égal à $v(p) – Ln\ p/p^n$.

On en déduit que $v(p) – (Ln2)/2^n \leq F_n(p) \leq v(p) – (Ln\ p)/p^n$.

3d – Trouver un encadrement pour v(p).

Correction :
En appliquant la double inégalité précédente, on a directement :

$F_n(p) + (Ln\ p)/p^n \leq v(p) \leq F_n(p) + (Ln\ 2)/2^n$

3e – Montrer que v(p) est une suite majorée.
Justifier l'existence d'une limite de la suite v(p), que l'on notera V : $V = \lim_{p \to +\infty} v(p)$.

Déduire de ce qui précède un encadrement pour V.
Application numérique : n = 5 (on donne : Ln 2 = 0,693)

Correction :
On a remarqué, à la question 2, que pour $n \geq 2$, $F_n(u)$ était majorée par la quantité $(Ln\ 2)/2^{n-1}(n – 1) + 1/2^{n-1}(n – 1)^2$.
On en déduit immédiatement que le terme v(p) est majoré par la quantité :
$(Ln\ 2)/2^{n-1}(n – 1) + 1/2^{n-1}(n – 1)^2 + (Ln\ 2)/2^n$

La suite v(p) est donc croissante (question 3a) et majorée ; d'après un résultat connu, elle admet donc une limite V.

En faisant tendre p vers + ∞ dans la double inégalité d'encadrement de v(p) :

$F_n(p) + (\mathrm{Ln}\ p)/p^n \leq v(p) \leq F_n(p) + (\mathrm{Ln}\ 2)/2^n$

on en déduit : $\lim\limits_{p\to+\infty} F_n(p) \leq V \leq \lim\limits_{p\to+\infty} F_n(p) + (\mathrm{Ln}\ 2)/2^n$

où la limite de $F_n(p)$ quand p tend vers l'infini est la quantité précédemment trouvée à la question (2c) : $(\mathrm{Ln}\ 2)/2^{n-1}(n-1) + 1/2^{n-1}(n-1)^2$.

Application : n = 5, Ln 2 = 0,693, et $0{,}0147 \leq V \leq 0{,}03539$.

3f – A partir de quelle valeur de n la longueur de l'intervalle encadrant V est inférieure ou égale à 0,001 ?

<u>Correction</u> :
La longueur de l'intervalle d'encadrement de V est $(\mathrm{Ln}\ 2)/2^n$.
Si on veut une longueur de l'intervalle inférieure à 0,001, cela signifie que :
$(\mathrm{Ln}\ 2)/2^n \leq 0{,}001$
ou encore $2^n \geq 10^3\ \mathrm{Ln}\ 2$ c'est-à-dire $n \geq \mathrm{Ln}(10^3\ \mathrm{Ln}\ 2)/\mathrm{Ln}\ 2$
D'où $n \geq 10$.