ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de deux exercices et d'un problème indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

Soit f une application de]0, 1 [dans R^+ définie par $x \rightarrow f(x) = x - 2x^{1/2} + 1$.
Le symbole o représente la composition des applications.

Montrer que $f \circ f(x) = x$.

Exercice n° 2

Un individu vit dans un environnement où il est susceptible d'être contaminé par une maladie. Son état de santé est suivi mensuellement.

Pour un mois donné m, trois états sont possibles :

- il est immunisé (état I)
- il est malade (état M)
- il est non malade et non immunisé (état S)

D'un mois m au mois suivant m+1, son état peut évoluer selon les règles épidémiologiques suivantes :

- étant immunisé au mois m, il peut, au mois m+1, être encore immunisé avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1
- étant malade au mois m, il peut, au mois m+1, être encore malade avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état immunisé avec une probabilité 0,8
- étant en l'état S au mois m, il peut, au mois m+1, être encore en l'état S avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état malade M avec une probabilité 0,5.

1 – Ecrire la matrice A qui résume les probabilités de transition entre l'état du mois m et l'état du mois m+1.

2 – Dans chacun des cas suivants, calculer les probabilités pour qu'un individu soit dans l'état e au mois m+2, e = I ou M ou S, sachant :

a) qu'il était immunisé au mois m

b) qu'il était non malade et non immunisé au mois m

c) qu'il était malade au mois m

Problème

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.

On considère la suite de fonctions numériques f_n où, pour tout entier n strictement positif, la fonction f_n est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = (\text{Ln } x) / x^n$$

1 – Etudier précisément les variations de f_n, pour $n \geq 1$ (limites, points particuliers, …). Soient x_M et y_M les coordonnées du point M en lequel f_n passe par son maximum. Déterminer le lieu géométrique de M, courbe décrite par le point M, lorsque n varie sur l'ensemble des nombres entiers.

2 – Pour tout réel u, $u \geq 1$, on définit l'intégrale $J_n(u)$ par :

$$J_n(u) = \int_1^u f_n(x)dx$$

2a – Exprimer $J_n(u)$ en fonction de u et de n.
(Indication : on pourra être conduit à distinguer les cas n = 1 et $n \geq 2$).
Calculer $J_n(2)$.

2b – On pose $F_n(u) = J_n(u) - J_n(2)$.
Exprimer $F_n(u)$ en fonction de u et de n.

2c – Déterminer $\lim\limits_{u \to +\infty} J_n(u)$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} F_n(u)$

3 – Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la suite v définie par son terme général d'ordre p, p entier strictement supérieur à 2 :

$$v(p) = \sum_{k=2}^{p} f_n(k) = \sum_{k=2}^{p} (\text{Ln } k)/k^n$$

3a – Montrer que la suite v(p) est croissante.

3b - Montrer que pour tous entiers n et k, $n \geq 2$, $k \geq 2$, on a :

$$f_n(k+1) \leq \int_k^{k+1} f_n(x)dx \leq f_n(k)$$

3c – En déduire que $v(p) - (Ln2)/2^n \leq F_n(p) \leq v(p) - (Ln\ p)/p^n$.

3d – Trouver un encadrement pour v(p).

3e – Montrer que v(p) est une suite majorée.
Justifier l'existence d'une limite de la suite v(p), que l'on notera V : $V = \lim_{p \to +\infty} v(p)$.

Déduire de ce qui précède un encadrement pour V.
Application numérique : n = 5 (on donne : Ln 2 = 0,693)

3f – A partir de quelle valeur de n la longueur de l'intervalle encadrant V est inférieure ou égale à 0,001 ?