AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Économie**

# CORRIGÉ DE LA 2$^{ème}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

## Exercice n° 1

On considère trois villes, A, B et C telles que A et C sont à égale distance de B :

d(A, B) = d(B, C).

Deux voitures se rendent de A à C en passant par B.

La première va à la vitesse v de A à B, puis deux fois plus vite ensuite de B à C.

La deuxième va de A à B à 48 km/h de moyenne, puis roule à la vitesse (v + 20) entre B et C.

Les deux voitures mettent le même temps pour aller de A à C.

Quelle est la valeur de v ?



Solution **:**

Pour la voiture V1, d étant la distance commune entre A et B, et B et C, on a :
$d = vt_1 = (2v)t_2$, où $t_1$ et $t_2$ sont les temps de parcours entre les villes A et B, et entre B et C.

De même, pour la voiture V2, $d = 48t^*_1 = (v+20)t^*_2$, où $t^*_1$ et $t^*_2$ sont les temps de parcours de V2.

Comme $t_1 + t_2 = t^*_1 + t^*_2$, on obtient l'équation $v^2 - 4v - 1440 = 0$, ce qui conduit à la solution v = 40.

## Exercice n° 2

On se place dans le corps *C* des nombres complexes et dans le plan complexe *P*.

1) Le symbole ¯ désigne la conjugaison. Déterminer l'ensemble *D* des points *M* dont l'affixe *z* vérifie l'équation :

$$z - i\bar{z} = 0$$

2) Au point *M* d'affixe $z$ on associe le point *M'* d'affixe *z'* tel que :

$$z' = h(z) = \frac{z + \bar{z} - i}{z - i\bar{z}}$$

Calculer $h(i)$.
Donner le module et un argument de $h(i)$.
Que peut-on dire de $(h(i))^8$ ?

3 ) Résoudre l'équation $h(z) = i$.

4) Déterminer $R$, $I$ et $U$, respectivement ensemble des points $M$ tels que $z'$ soit un nombre réel, ensemble des points $M$ tels que $z'$ soit un nombre imaginaire pur, ensemble des points $M$ tels que le module de $z'$ soit égal à 1.

<u>Solution</u> :

Docs à portée de main

1) Soit $z = x + iy$.
$x + iy - i(x + iy) = x - y + i(y - x) = 0 \Rightarrow D$ est la première bissectrice $y = x$.

2) Remarquer d'abord que $M$ ne peut appartenir à $D$.
$h(i) = (1 - i)/2$
Le carré du module de $h(i)$ est $\rho^2 = ½$, et un argument est $\theta = -\pi/4$ ou encore $7\pi/4$.

$(h(i))^8 = e^{56i\pi/4}/16 = e^{14i\pi}/16$ est un nombre réel (1/16).

3) $h(z) = i$ conduit à $z(1 - i) = i$ d'où $z = (i - 1)/2 = - (1 - i)/2$

4) En écrivant $z' = x' + iy'$, et en transformant la définition de $h(z)$, on obtient :

$x' = (2x + 1)/2(x - y)$

$y' = (2x - 1)/2(x - y)$

$z'$ réel si et seulement si $2x - 1 = 0$, $x = 1/2$

$z'$ imaginaire pur si et seulement si $2x + 1 = 0$, $x = - 1/2$

$U$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $(2x + 1)^2 + (2x - 1)^2 = 4(x - y)^2$
Ou encore :

$4y^2 - 4x^2 - 8xy - 1 = 0$ (hyperbole)

<u>Problème</u> **:**

Soit $f$ une application de $R$ dans $R^+$ définie par $x \to f(x) = e^{-x^2/2}$.

NB: on fournit les données numériques suivantes, qui pourront être utiles dans le problème : $Ln50 = 3,91$ ; $e^{1/2} = 1,648$ ; $e^{-1/2} = 0,607$ ; $e^{1/8} = 1,133$ ; $e^{-1/8} = 0,882$.

1) Trouver une relation $R1$ entre $f$ et $f'$, sa dérivée d'ordre 1.

2) Trouver une relation $R2$ entre $f$ et $f''$, et une relation $R3$ entre $f$ et $f^{(3)}$.

3) Etudier de façon précise et complète les variations de $f'$ et de $f$

4) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution, que l'on notera $\alpha$.

5) On note $J$ l'intervalle fermé $J = [1/2, 1]$.



5a - Montrer que $\alpha \in J$.

5b - Montrer que pour tout $x \in J$, $f(x) \in J$.

6) Montrer que, $\forall\ x \in J$, $|f'(x)| \leq M$, où $M$ est le meilleur majorant de $|f'(x)|$, que l'on calculera.

7) On définit la suite de terme général $u(n)$, $n$ entier, par $u(0) = 1$ et $u(n+1) = f(u(n))$.

Montrer, par récurrence, que $\forall\ n \in N$, $1/2 \leq u(n) \leq 1$.

8) Démontrer que, $\forall\ n \in N$, on a l'inégalité suivante :

$$\text{(E)} \qquad |u(\mathrm{n}+1) - \alpha| \leq M.|u(n) - \alpha|$$

9) Montrer que : $|u(n) - \alpha| \leq \mathrm{e}^{-n/2}/2$.

10) A partir de quelle valeur $n^*$, $|u(n) - \alpha|$ est –il inférieur ou égal à $10^{-2}$ ?

Proposer une méthode pour connaître la valeur de $u(n^*)$ à $10^{-2}$ près.

11) On appelle intégrale de Gauss l'expression $\int_{\mathrm{R}} f(x)\,dx$. Fin du 18ème siècle, Pierre Simon de Laplace a calculé cette intégrale, égale à $(2\pi)^{1/2}$.

On note $\varphi(x) = f(x) / (2\pi)^{1/2}$, et $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\ dt$.

11a – Donner l'interprétation probabiliste de $\varphi(x)$ et de $\Phi(x)$.
Donner la valeur de la limite de $\Phi(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

11b – Soit $K(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} t^2\ \varphi(t)\ dt$

Calculer la limite de $K(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

<u>Solution</u> **:**

1) $f'(x) = -\,x\,\mathrm{e}^{-x^2/2} = -x\,f(x)$ (relation $R1$)

2) $f''(x) = -\,f(x) - x\ f'(x) = (x^2 - 1)\ f(x)$
$R2$ $f''(x) = (x^2 - 1)\ f(x)$

$f^{(3)}(x) = (x^2 - 1)\ f'(x) + 2x\,f(x)$
$R3$ $f^{(3)}(x) = (3x - x^3)\,f(x)$

3) Etude de $f'$ :

D'après *R2*, $f''$ est < 0 pour $x$ entre -1 et 1, nulle pour $x$ = + ou – 1, et positive hors de l'intervalle [-1, 1].
$f'$ est donc croissante sur ]- ∞, -1[, décroissante sur (-1, 1) et croissante sur ]1, + ∞ [.
Elle passe par un maximum $f'(-1) = e^{-1/2} = 0{,}607$ et un minimum $f'(1) = - e^{-1/2} = - 0{,}607$.
En outre, $f'(0) = 0$ ; on remarque aussi que $f'(1/2) = - e^{-1/8} / 2 = - 0{,}441$.
Quand $x \to +$ ou $-\infty$, $f'(x)$ tend vers 0.
Et, de façon évidente, $f'$ est impaire.



Etude de $f$ :
$f$ est positive et paire.
Comme $f'$ est > 0 pour $x$ < 0, et < 0 pour $x$ > 0, on en déduit que $f$ est croissante sur $R^-$ et décroissante sur $R^+$.
Elle passe par un maximum en 0, $f(0) = 1$.
Quand $x \to +$ ou $- \infty$, $f(x)$ tend vers 0.

4) Au vu de la forme de $f$ (question 3), comme $f$ est décroissante de 1 à 0 pour $x > 0$, il existe une et une seule intersection entre le graphe de $f$ et la première bissectrice $y = x$.
Une autre méthode possible consiste à étudier les variations de la fonction définie par $u(x) = f(x) - x$.
En calculant les dérivées $u'$ et $u''$ et en étudiant leurs signes, on voit aisément que $u$ est monotone décroissante sur $R$, de $+ \infty$ à $- \infty$.
Elle s'annule donc une et une seule fois, en $\alpha$.

5a) $u(1/2) = e^{-1/8} – 1/2 = 0{,}882 – 0{,}5 = 0{,}382 > 0$

$u(1) = e^{-1/2} – 1 = 0{,}607 – 1 = 0{,}393 < 0$

Donc la solution $\alpha$ de $u(x) = 0$ est dans l'intervalle $J = [1/2, 1]$.

5b) Soit x $\in J$ : $1/2 \leq x \leq 1$

Comme $f$ est décroissante sur $R^+$, d'après la question 3, $f(1) \leq f(x) \leq f(1/2)$, soit :
$0{,}607 \leq f(x) \leq 0{,}882$

Donc $f(x) \in J$.

6) On sait d'après la, question 1 que $f'(x) = - x\, f(x)$ et d'après la question 3 que $f'$ est décroissante entre -1 et +1, donc sur $J$.

$f'$ 1/2) = $- e^{-1/8} / 2 = - 0{,}441$

$f'(1) = - e^{-1/2} = - 0{,}607$

$f'$ est donc négative sur $J$.

En passant aux valeurs absolues, on a, $\forall\, x \in J$ : $e^{-1/8}/2 \leq |\, f\,'(x)\, | \leq e^{-1/2}$

On en déduit donc que, sur $J$, $|\, f\,'(x)\, | \leq e^{-1/2} = 0{,}607$

*Remarque* : on aurait pu écrire aussi :

$|\, f\,'(x)\, | = |x|\, f(x)$ et, pour $x \in J$, on a $|x| \leq 1$ et $f(x) \leq f(1/2) = e^{-1/8} = 0{,}882$

D'où, $\forall\, x \in J$, on a : $|\, f\,'(x)\, | \leq e^{-1/8} = 0{,}882$

Cette méthode, basée sur $f$, fournit aussi un majorant de $|\, f\,'(x)\, |$ sur $J$, mais moins bon (0,882 > 0,607) que la méthode employée à partir de  directement.

7) Raisonnons par récurrence.
$u(0) = 1$ et donc $\in J$.
Supposons $u(n) \in J$; d'après le résultat de la question 5b, $u(n+1) = f(u(n)) \in J$.

8) On sait que $f(u(n)) - f(\alpha) = (u(n)) - \alpha).\, f\,'(c)$, où $c$ est compris entre $u(n)$ et $\alpha$, d'après le théorème des accroissements finis.

En passant aux valeurs absolues, et en remarquant que $f(u(n)) = u(n+1)$ et $f(\alpha) = \alpha$ (question 4), on a :

$|u(n+1) - \alpha| = |u(n) - \alpha|\; |\, f\,'(c)|$



Comme c est compris entre $u(n)$ et $\alpha$, $c \in J$, d'après la question 6, $|\, f\,'(c)| \leq M = e^{-1/2}$.

D'où : $|u(n+1) - \alpha| \leq e^{-1/2}|u(n) - \alpha|$ (relation E)

9) Il s'en suit que $|u(n) - \alpha| \leq e^{-n/2}|u(0) - \alpha| = e^{-n/2}\,(1 - \alpha)$

En outre, puisque $\alpha \in J = [1/2, 1]$, $(1 - \alpha) \leq 1/2$, et donc : $|u(n) - \alpha| \leq e^{-n/2}/2$

10) Soit $n^*$ tel que $e^{-n^*/2}/2 = 10^{-2}$ ; $n^* = 2\, Ln 50 \approx 8$.
A 1/100 près, $u(8)$ est bien approximé par la racine $\alpha$ de l'équation $h(x) - x = 0$.
On sait que $\alpha$ est compris entre 1/2 et 1.
Il reste à chercher une valeur plus précise de $\alpha$.
Cela peut être fait soit, par exemple, en cherchant l'intersection avec l'axe des abscisses de la droite passant par les points de coordonnées (1/2 ; 0,382) et (1 ; - 0,393), qui conduit à la valeur 0,746 (donc arrondie à 0,75 avec une précision de deux décimales), soit par approximations successives, qui mène aussi à 0,75.
La valeur du terme de rang 8 de la suite $u(n)$ est voisine de 0,75.

11a) $\varphi(x)$ est la densité de la loi de probabilité dite loi normale centrée réduite $N(0, 1)$ (ou loi de Laplace – Gauss).
$\Phi(x)$ est sa fonction de répartition définie par $P(N(0, 1) < x)$.
Puisque $\Phi$ est une fonction de répartition, la limité de $\Phi(x)$ est 1 quand $x$ tend vers l'infini.

11b) En faisant une intégration par parties de $\Phi(x)$, on a :
$\Phi(x) = -\, x^2\, e^{-x^2/2}/(2\pi)^{1/2} + K(x)$
Quand $x \to +\infty$, $-\, x^2\, e^{-x^2/2} \to 0$, $\Phi(x) \to 1$ et donc $K(x) \to 1$.