

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de deux exercices et d'un problème indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

On considère trois villes, A, B et C telles que A et C sont à égale distance de B :

$$d(A, B) = d(B, C).$$

Deux voitures se rendent de A à C en passant par B.

La première va à la vitesse v de A à B, puis deux fois plus vite ensuite de B à C.

La deuxième va de A à B à 48 km/h de moyenne, puis roule à la vitesse $(v + 20)$ entre B et C.

Les deux voitures mettent le même temps pour aller de A à C.

Quelle est la valeur de v ?



Exercice n° 2

On se place dans le corps C des nombres complexes et dans le plan complexe P .

- 1) Le symbole $\bar{}$ désigne la conjugaison. Déterminer l'ensemble D des points M dont l'affixe z vérifie l'équation :

$$z - i\bar{z} = 0.$$

2) Au point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = h(z) = \frac{z + \bar{z} - i}{z - i\bar{z}}$$

Calculer $h(i)$.

Donner le module et un argument de $h(i)$.

Que peut-on dire de $(h(i))^8$?

3) Résoudre l'équation $h(z) = i$.

4) Déterminer R , I et U , respectivement ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel, ensemble des points M tels que z' soit un nombre imaginaire pur, ensemble des points M tels que le module de z' soit égal à 1.



Problème

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

NB: on fournit les données numériques suivantes, qui pourront être utiles dans le problème :

$$\ln 50 = 3,91 ; e^{1/2} = 1,648 ; e^{-1/2} = 0,607 ; e^{1/8} = 1,133 ; e^{-1/8} = 0,882.$$

1) Trouver une relation $R1$ entre f et f' , sa dérivée d'ordre 1.

2) Trouver une relation $R2$ entre f et f'' , et une relation $R3$ entre f et $f^{(3)}$.

3) Etudier de façon précise et complète les variations de f' et de f .

4) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution, que l'on notera α .

5) On note J l'intervalle fermé $J = [1/2, 1]$.

5a - Montrer que $\alpha \in J$.

5b - Montrer que pour tout $x \in J$, $f(x) \in J$.

6) Montrer que, $\forall x \in J$, $|f'(x)| \leq M$, où M est le meilleur majorant de $|f'(x)|$, que l'on calculera.

7) On définit la suite de terme général $u(n)$, n entier, par $u(0) = 1$ et $u(n+1) = f(u(n))$.

Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1/2 \leq u(n) \leq 1$.

8) Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a l'inégalité (E) suivante :

$$(E) \quad |u(n+1) - \alpha| \leq M. |u(n) - \alpha|$$

9) Montrer que : $|u(n) - \alpha| \leq e^{-n/2}/2$.

10) A partir de quelle valeur n^* , $|u(n) - \alpha|$ est-il inférieur ou égal à 10^{-2} ?
Proposer une méthode pour connaître la valeur de $u(n^*)$ à 10^{-2} près.

11) On appelle intégrale de Gauss l'expression $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$. Fin du 18^{ème} siècle, Pierre Simon de Laplace a calculé cette intégrale, égale à $(2\pi)^{1/2}$.

On note $\varphi(x) = f(x) / (2\pi)^{1/2}$, et $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$.



11a – Donner l'interprétation probabiliste de $\varphi(x)$ et de $\Phi(x)$.

Donner la valeur de la limite de $\Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

11b – Soit $K(x) = \int_{-\infty}^x t^2 \varphi(t) dt$

Calculer la limite de $K(x)$ quand x tend vers $+\infty$.