AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

1 – On considère deux nombres entiers relatifs a et b.
Montrer que le nombre $n = ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 3.

2 – Montrer que le produit P de trois nombres entiers naturels, pairs, consécutifs, est divisible par 48.

1 – Soit $n = ab(a - b)(a + b)$
Si a et/ou b sont divisibles par 3, n l'est également.
Supposons que a et b ne sont pas des multiples de 3.
Alors $a = 3p+1$ ou $3p+2$, et $b = 3q+1$ ou $3q+2$.
Soit $a = 3p+1$ et $b = 3q+1$: alors $a - b = 3(p - q)$ est donc divisible par 3, donc n également.
Soit $a = 3p+1$ et $b = 3q+2$: alors $a + b = 3(p + q + 1)$ est donc divisible par 3, donc n également.

2 – Soient trois nombres entiers naturels pairs consécutifs a, b et c.
On peut les écrire $a = 2p$, $b = 2p + 2$ et $c = 2p + 4$.

Alors $P = 8p(p+1)(p+2)$
P est donc divisible par 8.
Montrons que $p(p+1)(p+2)$ est divisible par $6 = 2x3$.
p, p+1 et p+2 étant trois entiers consécutifs, il y a forcément parmi eux un multiple de 2 et un multiple de 3.
D'où le résultat.

Remarque : $P \geq 48$. En effet, les 3 premiers entiers pairs sont 2, 4 et 6, dont le produit fait 48.

Problème 1

1 – Soit la fonction f définie sur $[-\pi/2, \pi/2]$ par :

$$f(x) = x \sin x$$

1a – Calculer la dérivée f' de f.

$f'(x) = x \cos x + \sin x$

1b – La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

$f'(0) = 0$
Cependant, pour savoir si une fonction est dérivable en un point x_0, il faut étudier la limite, quand x tend vers x_0, du taux d'accroissement $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$.
Ici $x_0 = 0$, et $(f(x) - f(0))/(x - 0) = \sin x$ qui tend vers 0 quand $x \to 0$.
f est donc dérivable en 0.

1c – Etudier précisément la fonction f sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$.

On remarque immédiatement que f est paire : $f(-x) = f(x)$, et on peut donc restreindre l'étude à $[0, \pi/2]$.
Sur cet intervalle, f' est positive (car x, $\sin x$ et $\cos x \geq 0$), et $f'(0) = 0$ et $f'(\pi/2) = 1$.
Donc f est strictement croissante sur $[0, \pi/2]$, avec de $f(0)= 0$ à $f(\pi/2) = \pi/2$.

1d – Calculer une primitive F de f : $F(x) = \int f(x)\,dx$

En intégrant par parties : $F(x) = \int x.\sin x.dx = -x.\cos x + \int \cos x\,dx = -x.\cos x + \sin x$

2 – On considère maintenant la fonction g définie sur R par :

$$g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 0$$

2a – La fonction g est-elle continue en 0 ?

$|g(x)| \leq |x| . |\sin(1/x)| \leq |x|$ puisque $|\sin(1/x)| \leq 1$.

Donc quand x tend vers 0, $g(x)$ tend vers 0.
La fonction g est donc continue en 0.

2b – Etudier la parité de g

$g(-x) = g(x)$, g est paire.

2c – Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$

Sur cet intervalle, les fonctions identité et sinus sont dérivables. g est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$g'(x) = \sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x})$

On remarque que g' n'est pas définie en 0.

2d – g est-elle dérivable en 0 ?

Calculons la limite de $(g(x) - g(0))/(x - 0) = \sin(1/x)$ quand $x \to 0$.
Au voisinage de 0, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, et $\sin(\frac{1}{x})$ oscille entre -1 et $+1$. le taux d'accroissement de g en 0 n'a pas de limite, g n'est donc pas dérivable en 0.

2e – Soit G la courbe représentative de g dans un repère orthonormé usuel.
Quels sont les points de G situés sur les bissectrices d'équations $y = x$ et $y = -x$?
Calculer les pentes des tangentes en ces points.

Cela revient à résoudre les équations $\sin(\frac{1}{x}) = 1$ ou -1.

Pour $\sin(\frac{1}{x}) = 1$, $\frac{1}{x} = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in N$.
D'où : $x = 2/(\pi + 4k\pi)$
$g'(2/(\pi + 4k\pi)) = 1$

Pour $\sin(\frac{1}{x}) = -1$, $\frac{1}{x} = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in N$.
D'où : $x = 2/(3\pi + 4k\pi)$
$g'(2/(\pi + 4k\pi)) = -1$.

3 – On considère maintenant la fonction h définie sur R par :

$$h(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } h(0) = 0$$

3a – La fonction h est-elle continue en 0 ?

Comme en (2a), h est majorée par x^2, et donc quand x tend vers 0, h(x) tend vers 0.
La fonction h est donc continue en 0.

3b – Etudier la parité de h

h est impaire.

3c – Montrer que h est dérivable en tout point x non nul ; h est-elle dérivable en 0 ?

Pour tout $x \neq 0$, h est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$h'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$

Calculons la limite de $(h(x) - h(0))/(x - 0) = x.\sin(\frac{1}{x}) = g(x)$ quand $x \to 0$.

D'après la question (2a), g tend vers 0 quand $x \to 0$, et h est dérivable en 0, avec $h'(0) = 0$.

3d – Soit H la courbe représentative de h dans un repère orthonormé usuel.
Quels sont les points de H situés sur les paraboles d'équations $y = x^2$ et $y = -x^2$?
Calculer les pentes des tangentes en ces points.

Cela revient à résoudre les équations $\sin(\frac{1}{x}) = 1$ ou -1, comme en (2e).

Pour $\sin(\frac{1}{x}) = 1$, $\frac{1}{x} = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in N$.
D'où : $x = 2/(\pi + 4k\pi)$
Comme $h'(x) = 2x.\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$: $h'(2/(\pi + 4k\pi)) = 4/(\pi + 4k\pi)$

Pour $\sin(\frac{1}{x}) = -1$, $\frac{1}{x} = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in N$.
D'où : $x = 2/(3\pi + 4k\pi)$
$g'(2/(\pi + 4k\pi)) = 4/(3\pi + 4k\pi)$.

Problème 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

1 – On considère une courbe C du plan définie comme l'ensemble des points M de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$, dépendant d'un paramètre réel t.
On donne, pour $t \in R$:

$x(t) = t + t^2/2$
$y(t) = t - t^2/2$

1 a – Etudier, dans le même tableau de variations, les variations de $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de t.

$x'(t) = t + 1$
$y'(t) = 1 - t$

Pour $t \in R$, $x(t)$ décroit de $+\infty$ à -1/2, lorsque t va de $-\infty$ à -1, puis croît jusqu'à $+\infty$ pour t allant de -1 à $+\infty$; $x(t)$ s'annule en $t = 0$.
En outre, $x(1) = 3/2$

$y(t)$ croît de $-\infty$ à 1/2, lorsque t va de $-\infty$ à +1, puis décroît jusqu'à $-\infty$ pour t allant de 1 à $+\infty$; $y(t)$ s'annule en $t = 0$.
En outre, $y(-1) = -3/2$.

1b – Etudier les points de la courbe *C* en lesquels la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

Cela revient à résoudre $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$.
$x'(t) = 0$ pour $t = -1$ (le point associé est (-1/2, -3/2)).
$y'(t) = 0$ pour $t = 1$ (le point associé est (3/2, 1/2)).

1c – Préciser les points d'intersection de *C* avec les axes *Ox* et *Oy*. Donner un vecteur directeur des tangentes en ces points.

Avec l'axe des ordonnées : $x(t) = 0$ pour $t = 0$ et -2
Pour $t = 0$, le point est O (0, 0)
Pour $t = -2$, le point correspondant est A(0, -4)

Avec l'axe des abscisses : $y(t) = 0$ pour $t = 0$ et 2
Pour $t = 0$, le point est O (0, 0)
Pour $t = 2$, le point correspondant est B(4, 0)

La courbe C coupe donc les axes en trois points : O, A et B.

Vecteur directeur des tangentes en O, A et B :
En O, $x' = 1$ et $y' = 1$; en A, $x' = -1$ et $y' = 3$; en B, $x' = 3$ et $y' = -1$.

1d – Donner graphiquement l'allure de la courbe *C*, en positionnant les points remarquables déterminés.

1e – Donner l'équation cartésienne $v(x, y) = 0$ de la courbe *C*.

On remarque que $t = (x + y)/2$
En reportant dans la définition de $x(t)$, on a :

$$x = (x + y)^2/8 + (x + y)/2$$

En développant, on obtient :

$$v(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4y = 0$$

2 – On se propose de déterminer précisément ce qu'est la courbe *C*.

2 a – Le plan étant assimilé au plan complexe, on considère l'application *h* qui, à tout point *M* d'affixe *z* du plan, associe un point *M'* d'affixe *Z*, définie par :

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\,z$$

Donner de façon précise la nature de l'application *h*.

On remarque que $Z = h(z) = e^{i\pi/4} z$

H est donc une rotation de centre O et d'angle π/4.

2b – Soit *M* le point d'affixe $z(t) = x(t) + i\,y(t)$.
Déterminer les coordonnées $X(t)$ et $Y(t)$ de *M'*, image de *M* par *h*.
Donner une équation cartésienne $\varphi(X, Y) = 0$ de la courbe *C'* des points *M'*.
Comment appelle-t-on la courbe *C'* ?
En déduire le nom de la courbe *C*.

Soit $z(t) = \rho\, e^{i\theta} = \rho\, cos\theta + i\rho\, sin\theta$, avec $x(t) = \rho\, cos\theta$ et $y(t) = \rho\, sin\theta$.

$Z = h(z) = e^{i\pi/4} z = \rho\, e^{i(\theta+\pi/4)} z$

D'où $X(t) = (x(t) - y(t))/2^{1/2}$ *et* $Y(t) = (x(t) + y(t))/2^{1/2}$

On en déduit : $Y = 2^{1/2}\, t$ *et* $X = 2^{-1/2}\, t^2$

D'où la relation $\varphi(X, Y) = 0 = 4.2^{1/2} X - Y^2$
La courbe *C'* est une parabole d'axe *Ox*.

Le courbe *C'* est l'image de *C* par la rotation de centre O et d'angle *π/4*. La courbe *C* est donc l'image de *C'* par la rotation de centre O et d'angle - *π/4*.
C'est donc encore une parabole, dont l'axe est la deuxième bissectrice.