ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée d'un exercice et de deux problèmes indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice

1 – On considère deux nombres entiers relatifs a et b.
Montrer que le nombre $n = ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 3.

2 – Montrer que le produit P de trois nombres entiers naturels, pairs, consécutifs, est divisible par 48.

Problème 1

1 – Soit la fonction f définie sur $[-\pi/2, \pi/2]$ par :

$$f(x) = x \sin x$$

1a – Calculer la dérivée f' de f.
1b – La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
1c – Etudier précisément la fonction f sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$.
1d – Calculer une primitive F de f.

2 – On considère maintenant la fonction g définie sur R par :

$$g(x) = x\sin(\frac{1}{x}) \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 0$$

2a – La fonction g est-elle continue en 0 ?

2b – Etudier la parité de g

2c – Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$

2d – g est-elle dérivable en 0 ?

2e – Soit G la courbe représentative de g dans un repère orthonormé usuel.
Quels sont les points de G situés sur les bissectrices d'équations $y = x$ et $y = -x$?
Calculer les pentes des tangentes en ces points.

3 – On considère maintenant la fonction h définie sur R par :

$$h(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}) \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } h(0) = 0$$

3a – La fonction h est-elle continue en 0 ?

3b – Etudier la parité de h

3c – Montrer que h est dérivable en tout point x non nul ; h est-elle dérivable en 0 ?

3d – Soit H la courbe représentative de h dans un repère orthonormé usuel.
Quels sont les points de H situés sur les paraboles d'équations $y = x^2$ et $y = -x^2$?
Calculer les pentes des tangentes en ces points.

Problème 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

1 – On considère une courbe C du plan définie comme l'ensemble des points M de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$, dépendant d'un paramètre réel t.
On donne, pour $t \in R$:

$$x(t) = t + \frac{t^2}{2} \text{ et } y(t) = t - \frac{t^2}{2}$$

1 a – Etudier, dans le même tableau de variations, les variations de $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de t.

1b – Etudier les points de la courbe C en lesquels la tangente est parallèle à l'un des axes du repère.

1c – Préciser les points d'intersection de C avec les axes Ox et Oy. Donner un vecteur directeur des tangentes en ces points.

1d – Donner graphiquement l'allure de la courbe C, en positionnant les points remarquables déterminés.

1e – Donner l'équation cartésienne $v(x, y) = 0$ de la courbe C.

2 – On se propose de déterminer précisément ce qu'est la courbe C.

2 a – Le plan étant assimilé au plan complexe, on considère l'application h qui, à tout point M d'affixe z du plan, associe un point M' d'affixe Z, définie par :

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\,z$$

Donner de façon précise la nature de l'application h.

2b – Soit M le point d'affixe $z(t) = x(t) + i\,y(t)$.

Déterminer les coordonnées $X(t)$ et $Y(t)$ de M', image de M par h.
Donner une équation cartésienne $\varphi(X, Y) = 0$ de la courbe C' des points M'.
Comment appelle-t-on la courbe C' ?
En déduire le nom de la courbe C.