AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

Le paramètre a est un réel strictement positif, $a > 0$.
Soit une application $f : [0, a] \to R$ continue, vérifiant pour tout réel x, $0 \leq x \leq a$, les deux conditions suivantes :

$$f(x) \neq -1$$

$$f(x).\ f(a-x) = 1$$

Calculer l'intégrale $I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx$

On a : $f(x) = 1/f(a\text{-}x)$

Donc $1/(1 + f(x)) = f(a-x)/(1 + f(a-x))$

$$\int_0^a (1/(1 + f(x)))\, dx = \int_0^a f(a-x)/(1 + f(a-x))\, Dx$$

En faisant le changement de variable $u = a - x$, on a :

$$\int_0^a (1/(1 + f(x)))\ \mathrm{dx} = \int_0^a f(\mathrm{u})/(1 + f(\mathrm{u}))\ \mathrm{du} = [\int_0^a (1 + f(x))/(1 + f(x)))\, dx]/2 = a/2$$

Problème 1

(le thème commun porte sur les suites, mais les trois parties sont indépendantes)

Partie A

Soit la suite (u_n), $n \in \mathrm{N}$, définie par :

$$u_0 > 0,\ u_1 > 0$$

(1) $\quad \forall\, n \in \mathrm{N},\ u_{n+2} = (u_n^2\, u_{n+1})^{1/3}$

1) Calculer le terme général de la suite u_n.

Indication : on pourra faire intervenir une autre suite (v_n), telle que $v_n = h(u_n)$, où h est une fonction mathématique simple, permettant de transformer l'expression (1) en une expression (1') liant de façon linéaire v_n, v_{n+1}, v_{n+2}.

2) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+ \infty$.

1) En passant au logarithme ($h = Ln$) : $Ln(u_{n+2}) = 2/3.\ Ln(u_n) + 1/3\ Ln(u_{n+1})$

On pose $v_n = Ln(u_n)$: $v_{n+2} = 2v_n/3 + v_{n+1}/3$

Avec $v_0 = Ln(u_0)$ et $v_1 = Ln(u_1)$

Equation associée : $3r^2 - r - 2 = 0$, qui admet comme solutions 1 et -2/3.

La forme générale de v_n est $v_n = a + b(-2/3)^n$

$v_0 = a + b$
$v_1 = a - 2b/3$
$\rightarrow a = (2v_0 + 3v_1)/5$ et $b = 3(v_0 - v_1)/5$

$u_n = \exp[a + b(-2/3)^n] = \exp[(2Lnu_0 + 3Lnu_1)/5 + (-2)^n(Lnu_0 - Lnu_1)/(5.3^{n-1})$

$u_n = (u_0^2.u_1^3)^{1/5} \exp[(-2)^n 3^{1-n} Ln((u_0/u_1)^{1/5}]$

2) Quand n tend vers $+ \infty$, u_n tend vers $(u_0^2 u_1^3)^{1/5}$

Partie B

Soit la suite (u_n), $n \in N$, définie par :

$u_0 > 0$, $u_1 > 0$

(2) $\forall\ n \in N$, $u_{n+2} = 2\ u_n\ u_{n+1} / (u_n + u_{n+1})$

1) Calculer le terme général de la suite u_n.

Indication : on pourra faire intervenir une autre suite (v_n), telle que $v_n = h(u_n)$, où h est une fonction mathématique simple, permettant de transformer l'expression (2) en une expression (2') liant de façon linéaire v_n, v_{n+1}, v_{n+2}.

2) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+ \infty$.

1) On pose $v_n = h(u_n) = 1/u_n$: on obtient alors $v_{n+2} = (v_n + v_{n+1})/2$
Equation associée : $2r^2 - r - 1 = 0$, qui admet comme solutions 1 et -1/2.

La forme générale de v_n est $v_n = a + b(-1/2)^n$

$$v_0 = a + b$$
$$v_1 = a - b/2$$

d'où : $a = (v_0 + 2v_1)/3$ et $b = 2(v_0 - v_1)/3$

$v_n = 1/u_n = (a + b(-1/2)^n)$

$u_n = 1/(a + b(-1/2)^n) = 1/[(1/u_0 + 2/u_1)/3 + 2(1/u_0 - 1/u_1)/3.(-1/2)^n)$

$u_n = 1/[(1/u_0 + 2/u_1)/3 + (-1)^n(1/u_0 - 1/u_1)/3.(2)^{1-n})$

2) Quand n tend vers $+\infty$, $(-1/2)^n$ tend vers 0, et u_n tend vers $1/a = 3u_0u_1/(2u_0 + u_1)$

Partie C

Soit la suite (u_n), $n \in \mathrm{N}$, définie par :

$$u_0 = u_1 = u_2 = 1$$

(3) $\forall\, n \in \mathrm{N}$, $u_{n+3} = (1 + u_{n+2}u_{n+1}) / u_n$

1) Calculer les premiers termes de (u_n), pour $n = 3$ à 8.

2) Montrer par récurrence que l'on peut écrire la suite (u_n) sous la forme (4) :

(4) $\forall\, n \geq 0$, $u_{n+4} = a\, u_{n+2} + b\, u_n$

où a et b sont des entiers que l'on déterminera.

3) En déduire que $\forall\, n \in \mathrm{N}$, $u_n \in \mathrm{N}^*$.

1) On calcule simplement que $u_3 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 7$, $u_6 = 11$, $u_7 = 26$, $u_8 = 41$.

2) En écrivant $u_4 = 3 = a + b$ et $u_5 = 7 = 2a + b$, on trouve a = 4 et $b = -1$.
Soit la relation : $u_{n+4} = 4u_{n+2} - u_n$
Elle est vraie au rang 0.
Supposons la relation vraie au rang n.
Montrons que $u_{n+5} = 4u_{n+3} - u_{n+1}$

D'après la relation (3), $u_{n+5} = (1 + u_{n+4}u_{n+3}) / u_{n+2} = (1 + (4u_{n+2} - u_n)u_{n+3}) / u_{n+2}$
$u_{n+5} = (1 + 4u_{n+2}u_{n+3} - u_nu_{n+3}) / u_{n+2}$

Or $u_{n+3}.\, u_n = 1 + u_{n+2}u_{n+1}$
D'où $u_{n+5} = (1 + 4u_{n+2}u_{n+3} - (1 + u_{n+2}u_{n+1}))/ u_{n+2} = (4u_{n+2}u_{n+3} - u_{n+2}u_{n+1}))/ u_{n+2}$
C'est-à-dire $u_{n+5} = 4u_{n+3} - u_{n+1}$
La relation est vraie au rang n+1.

3) Il s'en suit directement que $u_n \in \mathrm{N}^*$.

Problème 2

Partie 1

Soit A un réel non nul.
Montrer que, pour tout n entier non nul, on peut déterminer une suite unique de n+1 nombres réels (t_0, t_1, ….. t_{n-1}, t_n) vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $t_0 = 0$, $t_n = A$

(ii) $t_0 < t_1 < \ldots.. t_{n-1} < t_n$

(iii) $\forall\, k \in \{0, ..., n\text{-}1\}$ $t_{k+1} - t_k = A/n$

On trouve immédiatement que $t_k = kA/n$, pour k allant de 0 à n.

Partie 2

Soit la fonction $f : [0, 1] \to R$, continue et strictement positive.

1) Montrer que, pour tout n entier non nul, il existe dans $[0, 1]^{n+1}$ une suite unique de n+1 nombres réels (x_0, x_1, ….. x_{n-1}, x_n) vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $x_0 = 0$, $x_n = 1$

(ii) $x_0 < x_1 < \ldots.. x_{n-1} < x_n$

(iii) $\forall\, k \in \{0, ..., n\text{-}1\}$ $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\,dt$

2) Soit $U(n) = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$.

Déterminer la limite L de $U(n)$ quand n tend vers + ∞.

3) Etudier le cas particulier de $f(x) = e^x$

1) Posons $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t).dt$, qui existe d'après les hypothèses sur f ; en outre la dérivée $F'(x) = f(x) > 0$ donc F est strictement croissante sur [0, 1], et F est donc inversible.

Posons $t_k = F(x_k)$, et $A = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

On cherche une suite de n+1 nombres entre 0 et 1 vérifiant les 3 conditions de la partie 1 :

(i) $t_0 = 0$, $t_n = A$

(ii) $t_0 < t_1 < \ldots\ldots t_{n-1} < t_n$

(iii) $\forall\, k \in \{0, \ldots., n-1\}$ $t_{k+1} - t_k = A/n$

Donc $t_k = k\mathrm{A}/n$, pour k allant de 0 à n.

D'où $x_k = \mathrm{F}^{-1}(k\mathrm{A}/n)$, pour k allant de 0 à n.

En outre, puisque F et donc F^{-1} sont strictement croissantes, les x_k sont rangés en ordre croissant $x_0 < x_1 < \ldots\ldots x_{n-1} < x_n$

2) $U(n) = [\sum_{k=0}^{n} f(x_k)]/n = [\sum_{k=0}^{n} f(\mathrm{F}^{-1}(k\mathrm{A}/n))]/n$, qui converge vers :

$$\mathrm{A}^{-1} \int_0^A f(\mathrm{F}^{-1}(t)\, dt] = \mathrm{B}/\mathrm{A}$$

$$\text{Où B} = \int_0^A f(\mathrm{F}^{-1}(t)\, dt]$$

Faisons le changement de variable $u = \mathrm{F}^{-1}(t)$, ou $t = \mathrm{F}(u)$, $dt = f(u)\,\mathrm{d}u$

$$\mathrm{B} = \int_0^1 f(u)\, f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 f^2(u)\,\mathrm{d}u$$

On en déduit que $\mathrm{L} = \int_0^1 f^2(u)\,\mathrm{d}u \Big/ \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u$

3) Un calcul simple donne $\mathrm{A} = e - 1$.

De même, $x_k = Ln(k(e-1)/n)$

$\mathrm{B} = (e^2 - 1)/2$ et donc $L = (e + 1)/2$