ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée d'un exercice et deux problèmes indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice

Le paramètre a est un réel strictement positif, $a > 0$.

Soit une application $f : [0, a] \to R$ continue, vérifiant pour tout réel x, $0 \leq x \leq a$, les deux conditions suivantes :

$$f(x) \neq -1$$

$$f(x) \,.\, f(a-x) = 1$$

Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}\,dx$

Problème 1

(les trois parties sont indépendantes)

Partie A

Soit la suite (u_n), $n \in N$, définie par :

$$u_0 > 0,\ u_1 > 0$$

(1) $\quad \forall\, n \in \mathrm{N},\ u_{n+2} = (u_n^2\, u_{n+1})^{1/3}$

1) Calculer le terme général de la suite (u_n).

Indication : on pourra faire intervenir une autre suite (v_n), telle que $v_n = h(u_n)$, où h est une fonction mathématique simple, permettant de transformer l'expression (1) en une expression (*1*') liant de façon linéaire v_n, v_{n+1}, v_{n+2}.

2) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie B

Soit la suite (u_n), $n \in N$, définie par :

$u_0 > 0$, $u_1 > 0$

(2) $\forall$ n $\in N$, $u_{n+2} = 2\, u_n\, u_{n+1} / (u_n + u_{n+1})$

1) Calculer le terme général de la suite u_n.

Indication : on pourra faire intervenir une autre suite (v_n), telle que $v_n = h(u_n)$, où h est une fonction mathématique simple, permettant de transformer l'expression (2) en une expression (2') liant de façon linéaire v_n, v_{n+1}, v_{n+2}.

2) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie C

Soit la suite (u_n), $n \in N$, définie par :

$u_0 = u_1 = u_2 = 1$

(3) $\forall$ n $\in N$, $u_{n+3} = (1 + u_{n+2}u_{n+1}) / u_n$

1) Calculer les premiers termes de (u_n), pour $n = 3$ à 8.

2) Montrer par récurrence que l'on peut écrire la suite (u_n) sous la forme (4) :

(4) $\forall\, n \geq 0$, $u_{n+4} = a\, u_{n+2} + \mathrm{b}\, u_n$

où a et b sont des entiers que l'on déterminera.

3) En déduire que $\forall\, n \in N$, $u_n \in N^*$.

Problème 2

Partie 1

Soit A un réel non nul.

Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, on peut déterminer une suite unique de n+1 nombres réels (t_0, t_1, ….. t_{n-1}, t_n) vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $t_0 = 0$, $t_n = A$

(ii) $t_0 < t_1 < \ldots\ldots t_{n-1} < t_n$

(iii) $\forall\, k \in \{0, ..., n\text{-}1\}$ $t_{k+1} - t_k = A/n$

Partie 2

Soit la fonction f : $[0, 1] \to R$, continue et strictement positive.

1) Montrer que, pour tout n entier non nul, il existe dans $[0, 1]^{n+1}$ une suite unique de n+1 nombres réels (x_0, x_1, ….. x_{n-1}, x_n) vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $x_0 = 0$, $x_n = 1$

(ii) $x_0 < x_1 < \ldots\ldots x_{n-1} < x_n$

(iii) $\forall\, k \in \{0, ..., n\text{-}1\}$ $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\,dt$

2) Soit $U(n) = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$.

Déterminer la limite L de $U(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3) Calculer L dans le cas particulier de $f(x) = e^x$