AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

Les questions 2, 3, 4 et 5 sont indépendantes.

Soit P un polynôme de degré 3, sur le corps des complexes C :
$P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$.
On note z_1, z_2, z_3 les racines de P.
Soit les expressions :
$S(1) = z_1 + z_2 + z_3$
$S(2) = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$
$S(3) = z_1z_2z_3$

1) Exprimer $S(1)$, $S(2)$ et $S(3)$ en fonction de a, b et c.

Solution

En développant, on obtient $P(z) = z^3 - z^2 (z_1 + z_2 + z_3) + z (z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3) + z_1z_2z_3$
$P(z) = z^3 - z^2 S(1) + z\ S(2) + S(3)$

En identifiant :
$S(1) = -a$
$S(2) = b$
$S(3) = -c$

2) Soit l'équation $P(z) = z^3 + 5z^2 - 8z + m = 0$.
On suppose que deux des racines de l'équation vérifient $z_1 + z_2 = -1$.
Résoudre l'équation.

Solution
On a donc :
$S(1) = z_1 + z_2 + z_3 = -5$
$S(2) = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = -8$
$S(3) = z_1z_2z_3 = -m$
$z_1 + z_2 = -1$

$z_1 + z_2 + z_3 = -5 \Rightarrow z_3 = -4$
D'où, d'après $S(2)$:
$z_1z_2 - 4 (z_1 + z_2) = -8$
$4z_1z_2 = m$

$z_1 z_2 = -12$
$z_1 z_2 = m/4$

$\Rightarrow m = -48$

$z_1 + z_2 = -1$
$z_1 z_2 = -12$

$z_1(1 + z_1) = 12$

L'équation $z_1^2 + z_1 - 12 = 0$ conduit à deux valeurs de z_1 :

a) $z_1 = -4$ d'où $z_2 = 3$

b) $z_1 = 3$ d'où $z_2 = -4$

Solutions : $(-4, 3, -4)$ et $(3, -4, -4)$

3) Soit l'équation $P(z) = z^3 + pz + q = 0$.
Pour quelles valeurs de p cette équation admet-elle trois racines réelles dont deux de différence 1 ?
Résoudre l'équation.

Solution

$S(1) = z_1 + z_2 + z_3 = 0$
$S(2) = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = p$
$S(3) = z_1 z_2 z_3 = -q$
Et on a, par exemple : $z_1 - z_2 = 1$

On reporte $z_1 = 1 + z_2$

$1 + 2z_2 + z_3 = 0$
$(1 + z_2)(z_2 + z_3) + z_2 z_3 = p$
$(1 + z_2) z_2 z_3 = -q$

$z_3 = -1 - 2z_2$, que l'on reporte dans la deuxième équation :

$(1 + z_2)(z_2 + -1 - 2z_2) + z_2(-1 - 2z_2) = p$

$(1 + z_2)(1 + z_2) + z_2(1 + 2z_2) = -p$

z_2 est racine de l'équation :

$3 z_2^2 + 3z_2 + 1 + p = 0$

Le discriminant est $D = -3(1 + 4p)$, et l'équation en z_2 aura deux racines réelles si et seulement si $D \geq 0$, soit $p \leq -1/4$.
Notons par d la racine positive de D.

Donc deux valeurs pour z_2 : $(-3 + d)/6$ et $(-3 + d)/6$, et deux triplets solutions :

$z_2 = (-3 + d)/6 \Rightarrow z_1 = (3 + d)/6$ et $z_3 = -d/3$

$z_2 = (-3 - d)/6 \Rightarrow z_1 = (3 - d)/6$ et $z_3 = d/3$

Remarque : si $D = 0$, *i.e.* $p = -1/4$, les deux triplets sont identiques $(1/2, -1/2, 0)$.

4) Soit l'équation $P(z) = z^3 - 7z + m = 0$.
On suppose que deux des solutions de cette équation vérifient la relation $z_2 = 2z_1$.
Résoudre l'équation.

Solution

$S(1) = z_1 + z_2 + z_3 = 0$
$S(2) = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = -7$
$S(3) = z_1z_2z_3 = -m$
$z_2 = 2z_1$

En remplaçant z_2 par $2z_1$, on obtient le système équivalent :

$3z_1 + z_3 = 0$
$2z_1^2z_3 = -m$
$2z_1(z_1 + z_3) + z_1z_3 = -7$

$2z_1^2 + 3z_1z_3 = -7$

$2z_1^2 + 3z_1(-3z_1) = -7 \Rightarrow z_1^2 = 1$ et deux valeurs possibles pour z_1 : 1 et – 1

$z_1 = -1 \Rightarrow z_3 = -m/2$ et $z_2 = -2$

$z_1 = 1 \Rightarrow z_3 = -m/2$ et $z_2 = 2$

Solutions : $(-1, -2, -m/2)$ et $(1, 2, -m/2)$

5) Soit l'équation $P(z) = z^3 + pz + q = 0$.
Calculer, en fonction de p et q, la somme $E = (1/z_1)^2 + (1/z_2)^2 + (1/z_3)^2$

Solution

En réduisant au même dénominateur, on montre aisément que :
$E = [S(2)^2 - 2\,S(1)\,S(3)] / S(3)^2$
Or, compte tenu de la forme de P, $S(1) = 0$, $S(2) = p$ et $S(3) = -q$

On en déduit : $E = p^2/q^2$

Problème 2

Données : $Ln2 = 0{,}693$; $Ln1000 = 6{,}908$, Ln signifiant logarithme népérien.

On considère une urne de 11 boules, de même taille et de même texture. Le seul élément qui les différencie est la couleur. Il y a 6 boules bleues, 3 boules rouges, et deux boules vertes.

1) On tire au hasard, en même temps, trois boules dans l'urne en fermant les yeux.

1a - Soient les deux événements suivants :

A = {les 3 boules sont toutes de couleurs différentes}

B = {les 3 boules sont de la même couleur}

Calculer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$ des deux événements A et B.

$P(A) = 12/55 = 0{,}218$
$P(B) = 7/55 = 0{,}127$

1b – *A* tout tirage de 3 boules on associe X, nombre de boules bleues tirées.
Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
Calculer les probabilités $P(X = x)$, x parcourant l'ensemble des valeurs possibles pour X.
Calculer l'espérance mathématique de X.

X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3.
$P(X = 0) = 2/33 = 0{,}061$
$P(X = 1) = 4/11 = 0{,}364$
$P(X = 2) = 5/11 = 0{,}454$
$P(X = 3) = 4/33 = 0{,}121$

$E(X) = (2x0 + 12x1 + 15x2 + 4x3)/33 = 54/33 = 1{,}636$

2) Au lieu de tirer en même temps les boules, on modifie la procédure et on procède de la façon suivante : dans l'urne, on tire au hasard, toujours sans regarder les couleurs, une première boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne, puis on en tire une deuxième, selon le même processus, etc …
On effectue k tirages successifs indépendants, k étant un nombre entier supérieur ou égal à 2.

On définit les deux événements suivants :

C = {toutes les boules tirées sont bleues}
D = {toutes le boules tirées sont rouges}

Quelle est la plus petite valeur de k telle que $P(C) \geq 1000\ P(D)$?

La probabilité de tirer une boule bleue est 6/11 ; celle de tirer une boule rouge est 3/11.
$P(C) = (6/11)^k$, et $P(D) = (3/11)^k$.
$P(C) \geq 1000\ P(D)$ devient $(6/11)^k \geq 1000\ (3/11)^k$, soit $6^k \geq 1000\ 3^k$.
En passant au Logarithme népérien :
$k\ Ln6 \geq k\ Ln3 + Ln1000$
$k\ \mathrm{Ln}3 + k\ Ln2 \geq k\ Ln3 + Ln1000$
$k.Ln2 \geq Ln1000$
$k \geq (Ln1000)/Ln2 = 6{,}908/0{,}693 = 9{,}97$
$k = 10$

Problème 3

1) Trouver tous les couples d'entiers naturels non nuls x, y, avec $x \leq y$, dont la somme est un multiple du produit.

Solution

Soit $x + y = kxy$, où k est un entier > 0.
Comme $x \leq \mathrm{y}$, $kxy \leq 2y$, et comme x et y sont non nuls : $kx \leq 2$, *ie* $x \leq 2 / k$
Comme x est entier, les seules valeurs de k possibles sont $k = 1$ ou $k = 2$.
Soit donc $x = 1$ ($k = 2$) et $x = 2$ ($k = 1$)
Pour $x = 1$, $1 + y = 2\ y$ soit $y = 1$
Pour $x = 2$ ($k = 1$), $2 + y = 2y$ soit $y = 2$
Couples : (1, 1) et (2, 2)

2) Trouver tous les triplets d'entiers naturels non nuls x, y, z, avec $x \le y \le z$, tels que :

$$xyz = 4(x + y + z)$$

Solution

$xyz = 4(x + y + z) \Longrightarrow xyz \le 12z$
Puisque z est non nul : $xy \le 12$.
Soit donc à trouver deux entiers x et y, $x \le y$, tels que $xy \le 12$.

Il y a 19 couples candidats qui sont :
(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10), (1, 11), (1, 12),
(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 3), (3, 4)

$xyz = 4(x + y + z) \Longrightarrow z = 4(x + y) / (xy - 4)$

Le tableau suivant donne les valeurs de z associées aux couples candidats :

x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z	-8/3	-6	-16	∞	24	14	32/3	9	8	22/3
x	1	1	2	2	2	2	2	3	3	
y	11	12	2	3	4	5	6	3	4	
z	48/7	13/2	∞	10	6	14/3	4	24/5	7/2	

Comme z doit être entier et supérieur ou égal à x et y, il n'y a que 5 triplets solutions qui sont :

(1, 5, 24), (1, 6, 14), (1, 8, 9), (2, 3, 10), (2, 4, 6).

Problème 4

Soit n un nombre positif donné.
On considère une suite $S = \{u_0, u_1, \ldots, u_{2n+1}\}$ constituée de $2n+2$ entiers naturels consécutifs classés dans l'ordre croissant : $u_0 < u_1 < \ldots < u_{2n+1}$.

Indication :

a étant un nombre entier, la suite $\{a - n, a - n + 1, \ldots, a, a + 1, a + 2, \ldots a + n\}$ est une suite de $2n+1$ entiers consécutifs positifs et croissants.

1) Préliminaires :

1a) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = n^2(n+1)^2/4$

Solution

*C'*est une formule bien connue, qui se démontre par récurrence sans aucune difficulté

1b) Etudier la fonction f définie sur R par :

$$f(x) = (x - n)^3 + (x - n + 1)^3 + \dots + x^3 - (x + 1)^3 - (x + 2)^3 - \dots - (x + n)^3$$

où n est un entier naturel non nul.

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique notée a où a vérifie :

$$3n(n+1) < a < 1 + 3n(n+1)$$

Solution

Transformons f.
$f(x) = x^3 + S_{\text{k=1àn}} [(x - k)^3 - (x + k)^3]$
$= x^3 - 6x^2 S_{\text{k=1àn}} k - 2 S_{\text{k=1àn}} k^3$
$= x^3 - 3x^2n(n+1) - n^2(n+1)^2/2$

$f'(\mathrm{x}) = 3x^2 - 6xn(n+1) = 3x (x - 2n(n+1))$ s'annule en 0 et $2n(n+1)$.

Sur R, f est donc croissante sur $]-\infty, 0[$ allant de $-\infty$ à $-n^2(n+1)^2/2$, puis décroit sur $]0,2n(n+1)[$ de $-n^2(n+1)^2/2$ à $n^2(n+1)^2[8n(n+1) - 25/2]$, terme négatif même si $n= 1$, et croît à nouveau sur $]2n(n+1), +\infty[$ de $n^2(n+1)^2[8n(n+1) - 25/2]$ à l'infini.

Il existe donc une et une seule solution α à l'équation $f(x) = 0$, $\alpha > 2n(n+1)$.

Calculons $f(3n(n+1))$:

$f(3n(n+1)) = -n^2(n+1)^2/2$, terme < 0.

De même :

$f(1 + 3n(n+1)) = (1 + 3n(n+1))^3 - 3(1 + 3n(n+1))^2 n(n+1) - n^2(n+1)^2/2$

En développant :

$f(1 + 3n(n+1)) = 1 + 27 n^{3(n+1)}3 + 9n(n+1) + 27 n^2(n+1)^2 - 3[1 + 9 n^2(n+1)^2 + 6n(n+1)]n(n+1) - n^2(n+1)^2/2$
$= 1 + 6n(n+1) + 17 n^2(n+1)^2/2$, terme > 0

D'où l'encadrement recherché pour α .

2) Existe-t-il une suite S vérifiant la relation A ?

$$(A) \qquad u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_{n+1} + \dots + u_{2n+1}$$

Solution

Utilisons la suite donnée dans l'indication :

$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n - (u_{n+1} + \dots + u_{2n+1})$
$= x + S_{\text{k=1àn}} [(x - k) - (x + k)]$
$= x - 2S_{\text{k=1àn}} k = x - n(n+1) = 0$

Donc si on prend $a = n(n+1)$, on a une solution pour (A).

3) Existe-t-il une suite S vérifiant la relation B ?

$$(B) \quad (u_0)^2 + (u_1)^2 + \ldots. + (u_{n-1})^2 + (u_n)^2 = (u_{n+1})^2 + \ldots. + (u_{2n+1})^2$$

Solution

Comme pour la question 2 :
$(u_0)^2 + (u_1)^2 + \ldots. + (u_{n-1})^2 + (u_n)^2 - [(u_{n+1})^2 + \ldots. + (u_{2n+1})^2]$
$= x^2 + S_{k=1\text{àn}} [(x-k)^2 - (x+k)^2]$
$= x^2 - 4\text{x}S_{k=1\text{àn}}\, k$
$= x^2 - 2xn(n+1) = x(x - 2n(n+1)) = 0$

$x = 0$ est impossible (cela conduirait à des termes négatifs), donc $x = 2n(n+1)$.
Si on prend $a = 2n(n+1)$, on obtient une solution pour (B).

4) Existe-t-il une suite S vérifiant la relation C ?

$$(C) \quad (u_0)^3 + (u_1)^3 + \ldots. + (u_{n-1})^3 + (u_n)^3 = (u_{n+1})^3 + \ldots. + (u_{2n+1})^3$$

Solution

Comme précédemment, et d'après la question 1b :
$(u_0)^3 + (u_1)^3 + \ldots. + (u_{n-1})^3 + (u_n)^3 - [(u_{n+1})^3 + \ldots. + (u_{2n+1})^3]$
$= x^3 + S_{k=1\text{àn}} [(x-k)^3 - (x+k)^3]$
$= x^3 - 3x^2n(n+1) - n^2(n+1)^2/2 = 0$

D'après la question 1b, cette équation admet une solution comprise strictement entre les deux entiers consécutifs $3n(n+1)$ et $1 + 3n(n+1)$.

Contrairement aux questions 2 et 3, il est donc impossible de trouver un nombre a entier naturel permettant de construire une suite de S solution de (C).