AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème 1

Les questions 2, 3, 4 et 5 sont indépendantes.

Soit P un polynôme de degré 3, sur le corps des nombres complexes C :

$$P(z) = z^3 + az^2 + bz + c.$$

On note z_1, z_2, z_3 les racines de P .

Soient les expressions :

$$S(1) = z_1 + z_2 + z_3$$

$$S(2) = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$$

$$S(3) = z_1z_2z_3$$

1) Exprimer $S(1)$, $S(2)$ et $S(3)$ en fonction de a , b et c .

2) Soit l'équation $P(z) = z^3 + 5z^2 - 8z + m = 0$.

On suppose que deux des racines de l'équation vérifient $z_1 + z_2 = -1$.

Résoudre l'équation.

3) Soit l'équation $P(z) = z^3 + pz + q = 0$.

Pour quelles valeurs de p cette équation admet-elle trois racines réelles dont deux de différence 1 ?

Résoudre l'équation.

4) Soit l'équation $P(z) = z^3 - 7z + m = 0$.

On suppose que deux des solutions de cette équation vérifient la relation $z_2 = 2z_1$.

Résoudre l'équation.

5) Soit l'équation $P(z) = z^3 + pz + q = 0$.

Calculer, en fonction de p et q , la somme $E = (1/z_1)^2 + (1/z_2)^2 + (1/z_3)^2$

Problème 2

Données : $\ln 2 = 0,693$; $\ln 1000 = 6,908$, $\ln$ désigne le logarithme népérien.

On considère une urne de 11 boules, de même taille et de même texture. Le seul élément qui les différencie est la couleur. Il y a 6 boules bleues, 3 boules rouges, et deux boules vertes.

1) On tire au hasard, en même temps, trois boules dans l'urne en fermant les yeux.

1a - Soient les deux événements suivants :

$A = \{\text{les 3 boules sont toutes de couleurs différentes}\}$

$B = \{\text{les 3 boules sont de la même couleur}\}$

Calculer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$ des deux événements A et B .

1b – A tout tirage de 3 boules on associe X , nombre de boules bleues tirées.

Quelles sont les valeurs possibles pour X ?

Calculer les probabilités $P(X = x)$, x parcourant l'ensemble des valeurs possibles pour X .

Calculer l'espérance mathématique de X .

2) Au lieu de tirer en même temps les boules, on modifie la procédure et on procède de la façon suivante : dans l'urne, on tire au hasard, toujours sans regarder les couleurs, une première boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne, puis on en tire une deuxième, selon le même processus, etc ...

On effectue k tirages successifs indépendants, k étant un nombre entier supérieur ou égal à 2.

On définit les deux événements suivants :

$C = \{\text{toutes les boules tirées sont bleues}\}$

$D = \{\text{toutes les boules tirées sont rouges}\}$

Quelle est la plus petite valeur de k telle que $P(C) \geq 1000 P(D)$?

Problème 3

- 1) Trouver tous les couples d'entiers naturels non nuls x, y , avec $x \leq y$, dont la somme est un multiple du produit.
- 2) Trouver tous les triplets d'entiers naturels non nuls x, y, z , avec $x \leq y \leq z$, tels que :

$$xyz = 4(x + y + z)$$

Problème 4

Soit n un entier positif non nul donné.

On considère une suite $S = \{u_0, u_1, \dots, u_{2n+1}\}$ constituée de $2n+2$ entiers naturels consécutifs classés dans l'ordre croissant : $u_0 < u_1 < \dots < u_{2n+1}$.

Indication :

a étant un nombre entier, la suite $\{a - n, a - n + 1, \dots, a, a + 1, a + 2, \dots, a + n\}$ est une suite de $2n+1$ entiers consécutifs positifs et croissants.

1) Préliminaires :

1a) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = n^2(n+1)^2/4$

1b) Etudier la fonction f définie sur R par :

$$f(x) = (x - n)^3 + (x - n + 1)^3 + \dots + x^3 - (x + 1)^3 - (x + 2)^3 - \dots - (x + n)^3$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α où α vérifie :

$$3n(n+1) < \alpha < 1 + 3n(n+1)$$

2) Existe-t-il une suite S vérifiant la relation A ?

$$(A) \quad u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_{n+1} + \dots + u_{2n+1}$$

3) Existe-t-il une suite S vérifiant la relation B ?

$$(B) \quad (u_0)^2 + (u_1)^2 + \dots + (u_{n-1})^2 + (u_n)^2 = (u_{n+1})^2 + \dots + (u_{2n+1})^2$$

4) Existe-t-il une suite S vérifiant la relation C ?

$$(C) \quad (u_0)^3 + (u_1)^3 + \dots + (u_{n-1})^3 + (u_n)^3 = (u_{n+1})^3 + \dots + (u_{2n+1})^3$$