AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

Soit a un paramètre réel qui vérifie $0 < a < 1$.
N désigne un entier fixé, $N > 1$.

1) On considère la suite (u_n) de nombres réels vérifiant les relations suivantes :

$u_0 = 0$
$u_N = 1$
$u_n = a.u_{n+1} + (1 – a)u_{n-1}$, pour tout $n > 0$

Exprimer u_n en fonction de n, N et a (on discutera selon les valeurs du paramètre a).

$a.u_{n+1} – u_n + (1 – a)u_{n-1} = 0$
Equation caractéristique : $ar^2 - r + (1 – a) = 0$
$D = (1 – 2a)^2$

Cas n°1 : a = 1/2
Racine double $r = 1/2a = 1$
La solution générale de la suite s'écrit sous la forme $u_n = s + tn$
$u_0 = 0 = s$
$u_N = 1 = s + tN$
D'où $s = 0$ et $t = 1/N$
$u_n = n/N$

Cas n°2 : a ≠ 1/2
Deux racines distinctes : $r_1 = (1 – a)/a$ et $r_2 = 1$
Solution générale : $u_n = s(1)^n + t[(1 – a)++- ^2/a]^n$
$u_0 = 0 = s + t$
$u_N = 1 = s + t[(1 – a)/a]^N$

D'où $s = - t$ et $t = 1 / [((1 – a)/a)^N – 1]$

La solution générale de la suite est :
$u_n = [1 – ((1 – a)/a)^n] / [1 – ((1 – a)/a)^N]$

2) On considère la suite (v_n) de nombres réels vérifiant les relations suivantes :

$v_0 = 1$
$v_N = 0$
$v_n = a.v_{n+1} + (1 - a)v_{n-1}$, pour tout $n > 0$

Exprimer v_n en fonction de n, N et a.

$a.v_{n+1} - v_n + (1 - a)v_{n-1} = 0$
L'équation caractéristique est inchangée : $ar^2 - r + (1 - a) = 0$
$D = (1 - 2a)^2$

Cas n°1 : a = 1/2
Racine double $r = 1/2a$
La solution générale de la suite s'écrit sous la forme $v_n = s + tn$
$v_0 = 1 = s$
$v_N = 0 = s + tN$
D'où $s = 1$ et $t = - 1/N$
$u_n = 1 - n/N$

Cas n°2 : a ≠ 1/2
Deux racines distinctes : $r_1 = (1 - a)/a$ et $r_2 = 1$
Solution générale : $v_n = s(1)^n + t[(1 - a)/a]^n$
$v_0 = 1 = s + t$
$v_N = 0 = s + t[(1 - a)/a]^N$

D'où $s = 1 - t$ et $t = 1 / [1 - ((1 - a)/a)^N]$

La solution générale de la suite est :
$v_n = [((1 - a)/a)^n - ((1 - a)/a)^N] / [1 - ((1 - a)/a)^N]$

Problème 2

Le Calife appelle son Grand Vizir, et lui tient ce discours :
« Cher ami, tout le monde sait que tu rêves de prendre ma succession quand je me retirerai. Alors pour que tout soit clair entre nous, je te propose le jeu suivant.
J'ai dans les mains deux sacs de forme et de couleurs identiques. Celui que je tiens dans ma main droite contient deux boules rouges, celui que j'ai dans ma main gauche en contient trois. Tu peux vérifier.
Voici six boules bleues : je te laisse les mettre dans ces sacs comme tu le souhaites. Quand tu auras procédé à la totale répartition de ces six boules bleues entre les deux sacs, tu fermeras les yeux, je tirerai au sort, entièrement au hasard, un sac, et tu choisiras une boule au hasard dans le sac que je te proposerai.
Si la boule est bleue, tu prendras ma succession instantanément.
Mais si elle est rouge, tu seras banni à jamais et condamné à l'exil ».

Comment le Grand Vizir doit-il répartir ses six boules bleues entre les deux sacs de façon à maximiser ses chances de devenir Calife ?

Appelons A le sac que le Calife tient dans sa main droite, et B celui de la main gauche.
Soit x le nombre de billes bleues que le Vizir va mettre dans A, et donc $6 - x$ le nombre de billes bleues qui iront dans B ; $0 \leq x \leq 6$.
Juste avant le tirage, le sac A contient alors $x + 2$ boules, 2 rouges et x bleues ; B en contient $9 - x$, 3 rouges et $6 - x$ bleues.
La probabilité que le Vizir devienne Calife est qu'il tire une boule bleue.
P(Bleue) = P(Bleue/A).P(A) + P(Bleue/B).P(B)

P(Bleue/A) = $x/(x + 2)$
P(Bleue/B) = $(6 - x)/(9 - x)$

P(Bleue) = $[x/(x + 2) + (6 - x)/(9 - x)]/2$

Il suffit alors de faire varier x de 0 à 6 et de voir pour quelle valeur de x cette probabilité est maximale.

x	0	1	2	3	4	5	6
P(Bleue)	0,333	0,479	0,536	0,55	0,533	0,482	0,375

Le meilleur choix est $x = 3$, répartition égale entre les deux sacs.

Problème 3

C désigne le corps des nombres complexes.

Partie A

Soit f l'application de C dans C qui, à tout complexe z, $z \neq -3$, associe f(z) défini par :

$$f(z) = (z + 1 - i)/(z + 3)$$

M désigne le point courant d'affixe z.

1) Déterminer l'ensemble, noté U, des points M tels que le module $|f(z)|$ de f(z) soit égal à 1.

Soit A le point d'affixe $-(1+i)$, B le point d'affixe (-3).
$|f(z)| = 1 \leftrightarrow BM/AM = 1$, soit BM = AM.
L'ensemble U est donc la médiatrice du segment AB.

2) Déterminer l'ensemble V des points M tels que f(z) soit un nombre réel strictement négatif.

Ecrivons f(z) sous une forme trigonométrique : f(z) = r(cosq + i.sinq).
Pour que f(z) soit un réel, il faut que sinq = 0, soit q = 0 ou π.
Pour que f(z) soit négatif, il faut que q = π.

L'argument de f(z) est l'angle $(\vec{MB}, \vec{MA})$.
Donc V est le segment AB, sauf les points A et B.

3) Déterminer l'ensemble W des points M tels que $|f(z)|$ soit un nombre imaginaire pur.

Comme à la question précédente, pour que f(z) soit un imaginaire pur, il faut que q = $\pi/2$ (modulo 2π).
M voit le segment AB sous un angle droit : W est donc le cercle de diamètre AB, à l'exception du point A.

Partie B

Soit g l'application de C dans C qui, à tout complexe z, $z \neq 2i$, associe g(z) défini par :

$$g(z) = (z - 1)/(z - 2i)$$

M désigne le point courant d'affixe z.

1) Ecrire g(i) sous forme cartésienne et sous forme trigonométrique.

$g(i) = -(1 + i)$
$r = 2^{1/2}$ et $q = -3\pi/4$

2) Résoudre l'équation g(z) = 2i
$g(z) = 2i = (z - 1)/(z - 2i) \leftrightarrow z(1 - 2i) = 5$
ou $z = 1 + 2i$

3) Déterminer l'ensemble A des points M tels que $|g(z)| = 2$.

Soit $z = x + iy$
$(x - 1)^2 + y^2 = 4[x^2 + (y - 2)^2]$
Ce qui conduit à :
$3x^2 + 3y^2 + 2x - 16y + 15 = 0$
Ou encore : $(x + 1/3)^2 + (y - 8/3)^2 = 20/9$
A est donc le cercle de centre (- 1/3, +8/3) et de rayon $2.5^{1/2}/3$

4) Déterminer l'ensemble B des points M tels que l'argument arg(g(z)) soit égal à $\pi/2$, modulo 2π.

Notons par E le point d'affixe 2i et F le point d'affixe 1.

B est l'ensemble des points M tels que l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{ME})$ est égal à $\pi/2$, modulo 2π.
C'est donc le demi-cercle de diamètre EF situé au-dessus du diamètre.
En effet, pour le demi-cercle au-dessous du diamètre, l'angle orienté est égal à - $\pi/2$.

5) Etudier l'intersection de A et B.

L'intersection de A et B est unique, et est 1 + 2i.

6) Résoudre l'équation f(z) = g(z).

$(z - 1)/(z - 2i) = (z + 1 - i)/(z + 3) \leftrightarrow z(1 + 3i) = 1 - 2i$
Ou encore : $z = -(1 + i)/2$

Problème 4

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien, de base e = 2,718.

On considère la famille de fonctions $f_{a,b}$, où a et b sont deux paramètres réels, définie sur $R^{+*} - \{1\}$, par :

$$f_{a,b}(x) = ax + b(\text{Ln } x)^{-1}$$

1 – Déterminer les réels a et b pour que la courbe C représentant graphiquement $f_{a,b}$ dans le repère orthonormé usuel coupe l'axe des abscisses au point E (e, 0), et pour que la tangente à C au point E soit parallèle à la droite y = 2x.

Dans la suite du problème, on notera par f la fonction correspondant aux valeurs ainsi trouvées de a et b.

$f_{a,b}(e) = ae + b$
$f'_{a,b}(x) = a - b/(x.\text{Ln}^2x)$
$f'_{a,b}(e) = a - b/e = 2$
Ce qui conduit à a = 1 et b = - e.
$f(x) = x - e/\text{Ln}x$

2 – Etudier très précisément les variations de f (dérivées, concavité, limites, asymptotes éventuelles, intersection avec les axes, etc …).

Domaine de définition : $R^{+*} - \{1\}$

Dérivée : $f'(x) = 1 + e/(x.\text{Ln}^2x)$, qui est strictement positive

Dérivée seconde :
$f''(x) = - e.\text{Ln}x(2 + \text{Ln}x)/(x^2.\text{Ln}^4x)$
f'' est négative pour $x < e^{-2}$ et $x > 1$, et négative entre e^{-2} et 1. La concavité s'en déduit.
f'' s'annule pour x = 1 (mais f n'y est pas définie) et pour $x = e^{-2}$.
Au point d'abscisse e^{-2}, la pente est $f'(e^{-2}) = 1 + e^3/4 \sim 6$.

Limites :

$x \rightarrow 0 : f(x) \rightarrow 0$
$x \rightarrow 1_- : f(x) \rightarrow + \infty$
$x \rightarrow 1_+ : f(x) \rightarrow - \infty$
$x \rightarrow + \infty : f(x) \rightarrow + \infty$

Point remarquable : outre le point d'inflexion, la courbe représentant f coupe l'axe des abscisses (f(x) = 0) au point d'abscisse e. D'après la question 1, la pente en (e, 0) est 2.

Pente à l'origine :
$(f(x) - f(0))/(x - 0) = 1 - e/(x\text{Ln}x) \rightarrow \infty$ quand $x \rightarrow 0$.

Asymptote :

La droite x = 1 est asymptote verticale.
La droite y = x est asymptote oblique ($f(x)/x \rightarrow 1$ et $f(x) - x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$

Tableau de variations

	0		e^{-2}		1		e		$+\infty$
f''		-	0	+	0 ||		-		
f'	$+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$ || $+\infty$		↘	1	
f	0		↗	$+\infty$	||		0	↗	$+\infty$

3 – Soit la fonction g définie sur l'intervalle $R^{+*} - \{1\}$ par :

$$g(x) = x - e/(x.Lnx)$$

3a) Etudier les positions respectives des courbes F et G représentant les fonctions f et g.

$g(x) - f(x) = e(x-1)/(xLn\ x)$
$g(x) - f(x) > 0$, donc G au dessus de F.
03b) Calculer une primitive de g(x).

Une primitive de g est $x^2/2 - e.\int dx/(x.Lnx) + K$, où K est une constante quelconque.
En posant $u = Lnx$, $\int dx/(x.Lnx) = \int du/u = Lnu = Ln(Lnx)$
Primitive : $K + x^2/2 - e.Ln(Lnx)$