ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème 1

Soit a un paramètre réel qui vérifie $0 < a < 1$.
N désigne un entier fixé, $N > 1$.

1) On considère la suite (u_n) de nombres réels vérifiant les relations suivantes :

$u_0 = 0$
$u_N = 1$
$u_n = a.u_{n+1} + (1 - a)u_{n-1}$, pour tout n entier > 0

Exprimer u_n en fonction de n, N et a (on discutera selon les valeurs du paramètre a).

2) On considère la suite (v_n) de nombres réels vérifiant les relations suivantes :

$v_0 = 1$
$v_N = 0$
$v_n = a.v_{n+1} + (1 - a)v_{n-1}$, pour tout n entier > 0

Exprimer v_n en fonction de n, N et a.

Problème 2

Le Calife appelle son Grand Vizir, et lui tient ce discours :
« Cher ami, tout le monde sait que tu rêves de prendre ma succession quand je me retirerai, et même peut-être avant.
Alors, pour que tout soit clair entre nous, je te propose le jeu suivant.
J'ai dans les mains deux sacs de formes et de couleurs identiques. Celui que je tiens dans ma main droite contient deux boules rouges, celui que j'ai dans ma main gauche en contient trois. Tu peux vérifier.
Voici six boules bleues : je te laisse les mettre dans ces sacs comme tu le souhaites. Quand tu auras procédé à la totale répartition de ces six boules bleues entre les deux sacs, tu fermeras les yeux, je tirerai au sort, entièrement au hasard, un sac, et tu choisiras une boule au hasard dans le sac que je te proposerai.
Si la boule est bleue, tu prendras ma succession instantanément.
Mais si elle est rouge, tu seras banni à jamais et condamné à l'exil ».

Comment le Grand Vizir doit-il répartir ses six boules bleues entre les deux sacs de façon à maximiser ses chances de devenir Calife ? Le résultat doit être justifié.

Problème 3

C désigne le corps des nombres complexes.

Partie A

Soit f l'application de C dans C qui, à tout complexe z, $z \neq -3$, associe f(z) défini par :

$$f(z) = \frac{z+1-i}{z+3}$$

M désigne le point courant d'affixe z.

1) Déterminer l'ensemble, noté U, des points M tels que le module $|f(z)|$ de f(z) soit égal à 1.

2) Déterminer l'ensemble V des points M tels que f(z) soit un nombre réel strictement négatif.

3) Déterminer l'ensemble W des points M tels que $|f(z)|$ soit un nombre imaginaire pur.

Partie B

Soit g l'application de C dans C qui, à tout complexe z, $z \neq 2i$, associe g(z) défini par :

$$g(z) = \frac{z-1}{z-2i}$$

M désigne le point courant d'affixe z.

1) Ecrire g(i) sous forme cartésienne et sous forme trigonométrique.

2) Résoudre l'équation g(z) = 2i

3) Déterminer l'ensemble A des points M tels que $|g(z)| = 2$.

4) Déterminer l'ensemble B des points M tels que l'argument arg(g(z)) soit égal à $\pi/2$, modulo 2π .

5) Etudier l'intersection de A et B.

6) Résoudre l'équation f(z) = g(z).

Problème 4

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien, de base e = 2,718.

On considère la famille de fonctions $f_{a,b}$, où a et b sont deux paramètres réels, définie sur $R^{+*} - \{1\}$, par :

$$f_{a,b}(x) = ax + \frac{b}{Lnx}$$

1 – Déterminer les réels a et b pour que la courbe C représentant graphiquement $f_{a,b}$ dans le repère orthonormé usuel coupe l'axe des abscisses au point E (e, 0), et pour que la tangente à C au point E soit parallèle à la droite y = 2x.

Dans la suite du problème, on notera par f la fonction correspondant aux valeurs ainsi trouvées de a et b.

2 – Etudier très précisément les variations de f (dérivées, concavité, limites, asymptotes éventuelles, intersection avec les axes, etc …).

3 – Soit la fonction g définie sur l'intervalle $R^{+*} - \{1\}$ par : $g(x) = x - \frac{e}{x.Lnx}$

3a) Etudier les positions respectives des courbes F et G représentant les fonctions f et g.

3b) Calculer une primitive de g(x).